

概率论基础

Mission: (1) 重点知识 (2) 加深理解 (3) 加强计算

第一讲: 随机事件与概率

一. 基本概念

1. 随机试验

我们称一个随机试验, 有三个条件:

- (1) 试验在相同条件下重复进行.
- (2) 所有可能结果明确可知, 且不止一个
- (3) 每次出现哪个结果, 事先也不能确定.

将其简称为试验, 并用字母 E 或 $E_1, E_2, \dots$ 表示.

[注] 有时不能确切知道全部结果, 可以用某个范围作为全部可能结果.

例如: 十字路口的事故与正态分布.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现、可能不出现的结果简称为事件.

并用大写字母 A, B, C 表示. 将每次一定发生的事件称为必然事件 Ω .

一定不发生的称为不可能事件 ϕ .

3. 样本空间

随机试验每一个最简单、最基本的结果称为基础事件 (或样本点)

记为 ω . 基本事件的全体为样本空间, 记为 Ω , 即 $\Omega = \{\omega\}$. 随机

事件若干样本点组成, 即 $\omega \subset A \subset \Omega$.

例: 掷骰子偶数点 $\omega = \{2, 4, 6\} \subset \Omega = \{\omega_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. 事件的关系与运算. (相当于集合关系运算, 事件就是集合)

(1) A 发生必导致 B 发生, 即 $A \subset B$.

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, A 与 B 完全相等

(3) 称 " A 与 B 同时发生" 的事件为 A 与 B 的交 (或积), 即 $A \cap B$ 或 AB .

(4) 若 $AB \neq \phi$, 则 A 与 B 相容; 若 $AB = \phi$, 则 A 与 B 互斥.

若一些事件任意两个都互斥, 称其两两互斥.

(5) 若A与B中至少一个发生, 则称A与B之和, 即 $A \cup B$

(6) 若A发生且B不发生的事件为A与B的差, 即 $A - B$, $A\bar{B}$.

称A不发生记为A的逆事件 or 对立事件, 记为 $\bar{A}$.

由定义知 $A - B = A - AB = A\bar{B}$, $B = \bar{A} \Leftrightarrow B \cup A = \Omega$ 且 $BA = \emptyset$

(7) 称有限个 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 称为完备事件组.

若 (1) $A_i = \Omega$ 且 $A_i A_j = \emptyset$ (对于任意 $i \neq j$)

事件的关系与运算关系

(1) 吸收律: 若 $A \subset B$ 则 $A \cap B = A$ 且 $A \cup B = B$

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(3) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(4) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(5) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. "长变短杠, 开口换方向"

$\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n$, $\overline{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \dots \cup \bar{A}_n$

△二. 古典概型求概率

1. 定义(条件)

样本空间满足: (1) 有限个样本点 (2) 每个样本点发生的可能性相同.

如果有 n 个基本事件, 事件A包含 k 个基本事件.

$\therefore P(A) = k/n$, 上式的概率称为A的古典概型. $\frac{1}{n}$ - 等可能性

2. 方法 一求k.

计数方法

(1) 列举法 (2) 集合对应法 ① 加法原理 - 完成事件用 n 类方法

② 乘法原理 - 完成一件事有 n 个步骤

③ 排列 - 从 n 中取出 m 个元素, 并按顺序列一排, 记 $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

④ 组合 - 从 n 中取出 m 个元素, 并为一组, 记 $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

[注] 全排列, $P_n^n = n!$ ($0! = 1$); $C_n^m = P_n^m / m!$

(3) 正难则反——若A太复杂, 可研究 $\bar{A}$. 用 $1 - P(\bar{A}) = P(A)$.

【例1】袋中5球, 3白2黑.

(1) 从中先后有放回取2球. (2) 先后无放回取2球 (3) 任取2球.

求 $P(A) = P(\text{至少一白})$.

【分析】“正难则反”, 则 $P(\bar{A}) = P(\text{两球全黑})$

(1) $P(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \Rightarrow P(A) = \frac{21}{25}$

(2) $P(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{10}$

(3) $P(\bar{A}) = 1/C_5^2 = 1/10 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{10}$.

【注】(2)(3) $P(A)$ 相同, 必然.

Δ 先后无放回概率
= 任取的概率.

【例2】袋中100个球, 40白60黑

(1) 先后无放回取20个, 求 $P\{15白4黑\}$

Δ (2) 先后无放回取20个, 求 $P\{\text{第20次取到白}\}$

Δ (3) 先后有放回取20个, 求 $P\{15白4黑\}$

(4) 先后有放回取20个, 求 $P\{\text{第20次取到白}\}$

【分析】(1) 等同于“任意取”, $P = C_{40}^{15} C_{60}^5 / C_{100}^{20}$

Δ 与次数无关
↑

Δ (2) ① $P(A) = C_{40}^1 \cdot 99! / 100! = 40/100 \leftarrow$ “绝对概率” $\rightarrow$ 抓阄模型

理解: “按概率成仿取球”

(3) $P(A) = C_{20}^{15} \times (0.4)^{15} (0.6)^5 = C_{20}^5 \cdot \frac{40^{15} \cdot 60^5}{100^{20}} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{= \text{二项分布}}$

(4) $P(A) = 0.4$

三. 几何概型求概率. — ∞

等可能性原则——我没有任意理由认为哪种情况更易发生, 则每个位置等可能.

1. 条件: (1) Ω (样本空间) 为一个度量的几何区域;

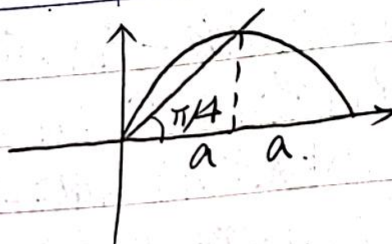
(2) 样本点发生可能性一样

$\therefore P(A) = A \text{ 的几何度量} / \Omega \text{ 的几何度量}.$

【例1】随机向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ 内投一点, 求该点与O的连线同x轴的夹角 $\theta < \frac{\pi}{4}$ 的概率.

[分析] $P(A) = S(A) / (\pi a^2 / 2)$

$$= (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2) / (\frac{1}{2}\pi a^2) = (2 + \pi) / 2\pi$$



[注] } 古典 - 难点非重点
 } 几何 - 重点非难点
 △重要公式 - 重点、难点

四. 重要公式求概率

1. 重要公式

(1) 正难则反 - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(2) 加法公式 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

(3) 减法公式 - $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$

(4) 条件概率公式 - 设 A, B 为两事件, $P(A) > 0$, 称“已知 A 发生的条件下 B 发生的概率”, 记为 $P(B|A) = P(AB) / P(A)$

[注] ① $P(*|A)$ 是概率, 满足一切性质与结果.

如: $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

$$P(B - C|A) = P(B|A) - P(BC|A)$$

$$P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$$

② 条件概率出现的标志 - “已知某事件已发生” → 题目明确告知.

(5) 乘法公式 - 如 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2)$$

△ (6) 全概率公式

△ 完备事件组

全集分解公式

$$P(B) = P(B|I) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3)$$

$$= P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

公式: 若 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = I$ 且 $A_i A_j = \emptyset$ 即三事件完备事件组.

↗ 互斥加法

↘ 乘法公式

$$\text{则 } P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

(7) 贝叶斯公式、逆概公式

抓果索因

在已知B的条件下, $P(A_i|B)$ 未知待求。

$$\therefore P(A_i|B) = P(A_i B) / P(B) = P(A_i)P(B|A_i) / \sum_{j=1}^3 P(A_j)P(B|A_j)$$

[注] ① $P(A_i|B)$ 与 $P(A_i)$ 一般不同, $P(A_i)$ 是 A_i 在 Ω 下条件发生的概率, $P(A_i|B)$ 是 A_i 在 B 下发生的概率, 样本空间改变。

(8) 独立性

定义: 任何事件发生概率, 不影响其它事件的发生, 即 $P(A|B) = P(A)$

判断: ① $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B)$ 两两独立。

② 三事件: $P(AB) = P(A)P(B)$ $P(BC) = P(B)P(C)$ $P(AC) = P(A)P(C)$

$\Delta P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. 称 A, B, C 两两独立相互

2. 例题

[例1] (1) 设事件 A, B 仅发生一个概率为 0.3, 且 $P(A) + P(B) = 0.5$, 求 A, B 至少一个不发生的概率。

(2) 设 x, y 为随机变量, 且 $P\{x \geq 0, y \geq 0\} = \frac{3}{7}$, $P\{x \geq 0\} = P\{y \geq 0\} = \frac{4}{7}$.

求 $A = \{\min\{x, y\} \geq 0\}$; $B = \{\max\{x, y\} \leq 0 \text{ 且 } \min\{x, y\} \leq 0\}$

$\Delta C = \{\max\{x, y\} \geq 0, \min\{x, y\} \leq 0\}$.

[分析] (1) $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.5 - 2P(AB) = 0.3$

$$\Rightarrow P(AB) = 0.1 \Rightarrow P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.9$$

$$(2) P(A) = \frac{3}{7}$$

$$P\{x \geq 0 \cup y \geq 0\} = \frac{4}{7} \times 2 - \frac{3}{7} = \frac{5}{7} = P(\max\{x, y\} \geq 0)$$

$$P(B) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(C) = \frac{4}{7} \times 2 - \frac{3}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$$

$$P(\max\{x, y\} \geq 0) = P(\max \geq 0 \cap \min \geq 0) + P(\max \geq 0 \cap \min < 0)$$

[注] $\{\min(x, y) \leq a\} = \{x \leq a\} \cup \{y \leq a\} = P(C) + P(\min \geq 0)$

$$\{\max(x, y) \leq a\} = \{x \leq a\} \cap \{y \leq a\} \Rightarrow P(C) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\{\max(x, y) \geq a\} = \{x \geq a\} \cup \{y \geq a\} \quad (\text{互斥, 创造全概率})$$

全集分解

$$\{\min(x, y) \geq a\} = \{x \geq a\} \cap \{y \geq a\}$$

$$\text{推广: } \{\max(x, y) \geq a\} \subseteq \{\max(x, y) \geq a\}$$

$$\{\max(x, y) \leq a\} \subseteq \{\min(x, y) \leq a\}$$

[例2] 设有两箱同种零件, 第一箱50件, 其中10件一品。第二箱30件, 其中18件一品。先从中挑一箱, 再从箱中不放回取出2个零件。等可能性

(1) 先取的零件是一品的概率 p 。

(2) 在(1)的条件下, 后取出的仍为一品的概率 q 。

分析 全概率思想

$$(1) p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{18}{30} = \frac{2}{5}$$

分阶段: I 挑箱子 $A = \{\text{第一箱}\}$ $\bar{A} = \{\text{第二箱}\}$

II 取零件 $B_1 = \{\text{先一品}\}$ $B_2 = \{\text{后一品}\}$

$$\therefore P(B_1) = P(B_1 \cup \bar{B}_1) = P(B_1|A) + P(B_1|\bar{A}) = P(A)P(B_1|A) + P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})$$

$$(2) P(B_2|B_1) = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{9}{49}) + \frac{1}{2} \times \frac{18}{30} \times \frac{17}{29} / \frac{2}{5} = \frac{690}{1421}$$

$$P(A|B_1) = P(AB_1) / P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} / \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}|B_1) = P(\bar{A}B_1) / P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{18}{30} / \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B_2|B_1) = P(B_1 B_2 | A \bar{A}) / P(B_1) = P(A)P(B_1 B_2 | A) + P(\bar{A})P(B_1 B_2 | \bar{A}) / P(B_1)$$

[例3] 设有两批数量相同的零件, 有一批全部合格, 另一批有25%不合格, 从两批中任选一批挑一个, 为正品, 放回后, 请问第二次仍为正品概率。

分析 分阶段 I $A = \{\text{第一批}\}$ $\bar{A} = \{\text{第二批}\}$

II $B_1 = \{\text{一正品}\}$ $B_2 = \{\text{二正品}\}$

$$P(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} / (\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$$

第二讲. 一维随机变量及其分布

统一化描述

$$\{\min(x, y) \geq a\} = \{x \geq a\} \cap \{y \geq a\}$$

确定性变量 $\rightarrow y = y(x)$

并

一. 基本概念

1. 随机变量

自变量 $\leftarrow$ 随机变量 $\rightarrow$ 数

$\chi = \chi(\omega)$

$\uparrow$ 对应法则 (神秘)

$\uparrow$ 样本

随机变量是“其值会随机变动的量”，设随机试验样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ ，如果对 $\forall \omega \in \Omega$ ，都有一唯一 $\chi(\omega)$ 与之对应，且对 $\forall x$ ， $\{\omega | \chi(\omega) \leq x\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的实单值函数 $\chi(\omega)$ 为随机变量，一般用 X, Y, Z 或 η, ξ 表示。

2. 分布函数

(1) 概念：设 X 为随机变量， x 为任意实数，称 $F(x) = P\{X \leq x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) 为 X 的分布函数或者称 X 服从 $F(x)$ 分布，记 $X \sim F(x)$

$\rightarrow$ 完整的规律性

$\uparrow$ x 要取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$

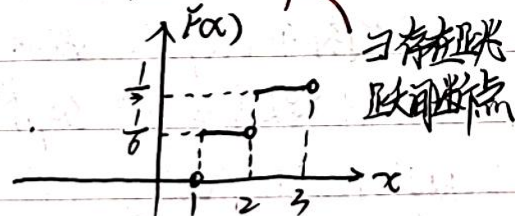
(2) 性质：(充要条件)

① $F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即对 $x_1 < x_2$ ，有 $F(x_1) \leq F(x_2)$

② $F(x)$ 是 x 的右连续函数，即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0 + 0) = F(x_0)$

③ $F(-\infty) = 0$ ， $F(+\infty) = 1$

[注] $F(x)$ 有界 $\in [0, 1]$



二. 两类常见随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

如果随机变量 X 只取有限个或可列个值 $x_1, x_2, \dots$ ，则称为离散变量。

称 $p_i = P\{X = x_i\}$ ， $i = 1, 2, \dots$ 为 X 的分布律，记 $X \sim P_i$ 。

一般用矩阵 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ ，如 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

其数列 $\{p_i\}$ 为离散分布充要条件为： $p_i \geq 0$ 且 $\sum p_i = 1$

设离散型随机变量 X 分布 $P_i = P\{X = x_i\}$ ，则分布函数 $F(x) = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\}$

同理 $P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0)$ ， $P\{X \in B\} = \sum_{x_i \in B} P\{X = x_i\}$ 。

特别的 $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a - 0)$ ； $P\{a < X < b\} = F(b - 0) - F(a)$

2. 连续型随机变量及其概率密度: 几何概型 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$

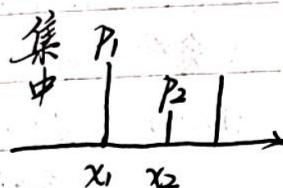
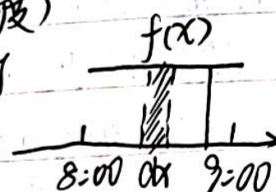
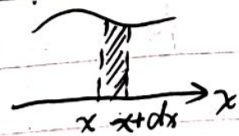
如果随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ($x \in \mathbb{R}$)

其 $f(t)$ 非负可积, 则称 X 为连续随机变量, $f(x)$ 为概率密度函数, 记 $X \sim f(x)$.

充要条件: $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ (改变有限点, $f(x)$ 仍为密度)

若 $X \sim f(x)$, 则 $P\{X=c\} = 0$; 对 B 而言, $\int_B f(t) dt = P\{X \in B\}$

特别 $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$



△三. 常见的随机变量分布类型

1. 离散型 (五个)

(1) 0-1分布 $B(1, p)$ Ber- E_1

如若 $X \sim \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$, 即 $P\{X=1\} = p$; $P\{X=0\} = 1-p$, 称 0-1 分布, $X \sim B(1, p)$

(2) 二项分布 $B(n, p)$ Ber- E_n , n 重伯努利实验, 1° 独立 2° 重复 3° $P(A)=P$
若 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, 则称 X 服从 (n, p) 的二项分布. $P(A)=1-p$

(3) 几何分布 $G(p)$ Ber $\sim Ex(\infty)$, 首中即停止 $\leftarrow$ 机器寿命故障

若 $P\{X=k\} = p (1-p)^{k-1}$, 则称 $X \sim G(p)$

△△ (4) 泊松分布 PA

若 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, 则称为 $X \sim PA$, k 为 N

([例子] 某人向一目标独立射击, 每命中概率为 p , 求此人第 4 次射击命中 2 次的概率. 恰好)

([分析] $P = p \times C_3^2 \times p \times (1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$)

△ 某单位时间内, 某场合中源源不断的质点来流的个数 X . 如顾客、访客

(k 自定, λ 未知体现了质点来流的强度, $\lambda = EX$, k 为 N , $k=0, 1, 2, \dots$)

→ 泊松分布有时也描述稀有事件发生的概率.

(5) 超几何分布 $H(n, N, M)$

若 $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, 记作 $X \sim H(n, N, M)$

N 个产品, 任取 M 个正品, 任取 n 件, 求 k 为 n 件中正品数. (例题)

2. 连续型

(1) 均匀分布 $U(a, b)$ — “几何概型”

如果 x 的概率密度或分布函数为

$$x \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{or} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

“归一性”

则称 x 在区间服从均匀分布, 记为 $X \sim U(a, b)$

(2) 指数分布 $E(\lambda)$ — “连续型寿命分布” λ — “失效率”

如果 x 的概率密度或分布函数为

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \lambda \text{ 个易坏}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{or} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则称 x 服从参数为 λ 的指数分布, 记 $X \sim E(\lambda)$.

(3) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

如果概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, -\infty < x < +\infty$

① μ 为均值, σ^2 为方差, $x = \mu$ 为对称轴

② 若 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 则 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$ 专用符号

称 $X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$

此时 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

③ 若 $X \sim N(0, 1), P\{X \geq u_\alpha\} = \alpha$, α 为显著性水平

则称 u_α 叫上 (侧) α 分位数, 可查表.

④ 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

标准化 $F(x) = P\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (期望去0, 水平)

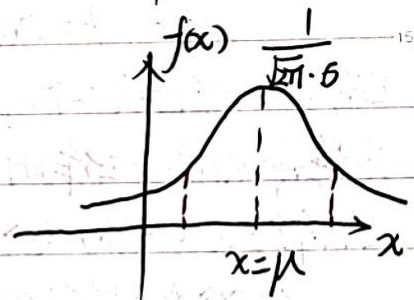
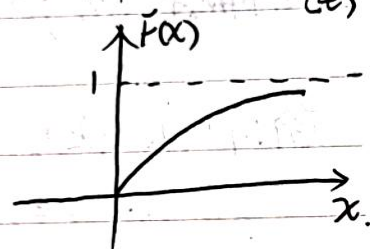
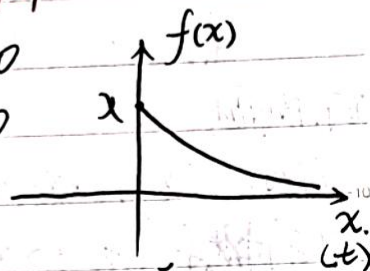
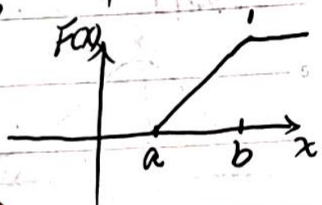
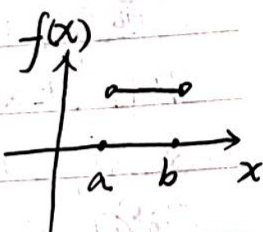
$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$aX + b \sim N(a\mu + b, \sigma^2), \sigma \neq 0$

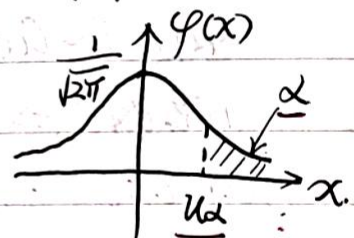
⑤ 标准化 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 标准正态分布.

$X \sim F(x) \triangleq P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$



高斯分布 Gauss



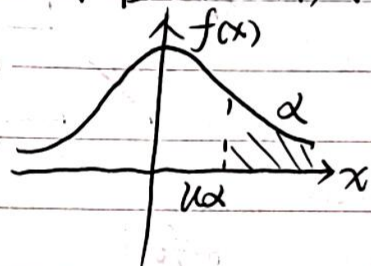
同理 $p\{a < X \leq b\} = p\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$, 查表.

【例1】(上 α 分位数) 设 $X \sim N(0, 1)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 u_α 满足 $p\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $p\{|X| < x\} = \alpha$, 求 x .

【分析】 $N(0, 1)$ 分布: $\therefore p\{|X| < x\} = \alpha$.

$$\therefore p\{X > x\} = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\therefore x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$$



四. 例题

【例1】 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的概率 p , $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上的 $U[-1, 3]$ 的概率 p . 若 $f(x) = \begin{cases} a f_1(x), & x \leq 0 \\ b f_2(x), & x > 0 \end{cases}$ 为概率 p . 求 a, b 满足的关系.

【分析】 (归一性) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^{+\infty} f_2(x) dx$ 取交集
即 $1 = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} = a \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx$
 $\Rightarrow 4 = 2a + 3b$

【例2】 一电路装三个同种电气元件, 工作状态相互独立且服从参数为 λ 的 $E(\lambda)$. 当三个元件都无故障工作时, 线路工作状态正常. 试求正常工作时间 T 的分布.

【分析】 $X \sim E(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ — “连续型寿命分析”

设 X_i 表示“第 i 个元件正常工作时间”, $i=1, 2, 3$. 则 $T = \min\{X_1, X_2, X_3\}$

且 $X_i \sim F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0; 0, \text{其他}.$

~~$G(t)$~~ $T \sim G(t) \triangleq p\{T \leq t\}, t \text{ 取遍 } -\infty \text{ 至 } +\infty$

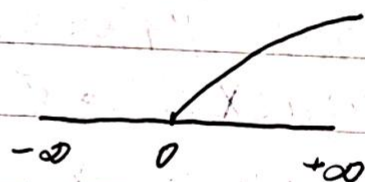
(1) 若 $t \leq 0 \Rightarrow G(t) = 0 = p\{T \leq 0\}$

(2) $t \geq 0 \Rightarrow G(t) = p\{T \leq t\}$

$$= 1 - p\{T > t\} = 1 - p\{\min(X_1, X_2, X_3) > t\}$$

$$= 1 - p\{X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t\} = 1 - (e^{-\lambda t})^3 = 1 - e^{-3\lambda t}$$

故 $T \sim G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



[注] 若三个元件中、有一个无故障时线路工作正常、需三个均故障、求 T 的分布
 设 $X_i \triangleq$ "第 i 个元件工作时间"

$$T \sim G(t) \triangleq P\{T \leq t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \leq t\}$$

$$= P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\}, X_i \text{ 相互独立.}$$

$$= (1 - e^{-\lambda t})^3, t \geq 0$$

$$\text{故 } T \sim G(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^3, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

△ 例 5-1 水渠出口闸门是边长为 1 单位的正方形、已知初始水位高为 $\frac{3}{4}$ 、现发现某部位出现一小孔 (等可能出现任何部位)、水经小孔流出、求
 剩余液面高度 X 的分布函数 $F(x)$.

分析 $\Delta F(x) \triangleq P\{X \leq x\}, x$ 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$.

(1) $x < 0, F(x) = 0$

(2) $x \geq \frac{3}{4}, F(x) = 1$

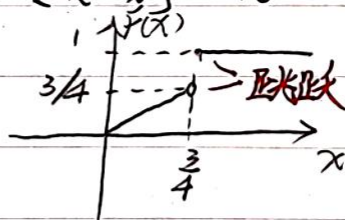
(3) $\frac{3}{4} > x \geq 0, F(x) = P\{X \leq x\} = P\{0 \leq X \leq x\} = x$

故 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & \frac{3}{4} > x \geq 0 \\ 1, & x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$

右连续

"小孔出现在下部且
 边长为 1 与 x 长方形内"

"几何概型"



[注] $X \sim F(x)$ 、非离散型非连续、有断点 $\Rightarrow f(x)$ 不可积, $F(x)$ 必可积
 称为混合型随机变量

五. 随机变量函数的分布 $Y = g(X)$ 概率未变

1. 概念及分布

(1) 概念: 设 X 的随机变量、函数 $y = g(x)$ 、则以随机变量作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也为随机变量、称为随机变量函数。

(2) 分布.

1) 离散型

设 X 为离散型, 其分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$, 则 X 的函数 $Y = g(X)$ 为离散型,
 $P\{Y = g(x_i)\} = p_i$, 即 $Y \sim \{g(x_1), g(x_2), \dots\}$ 若有若干项相同, 则合并一项
 [例1] 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.05 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$, 求 $Y = 2X+1$, $Z = X^2$ 的概率。

[分析] (解少考) $Y = 2X+1 \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0.05 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$

$Z = X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \Delta X \sim F(x) \triangleq P\{X \leq x\} \\ X \sim F_X(x) \triangleq P\{X \leq x\} \end{cases}$

2) 连续型: 设 X 为连续型, 其分布函数概率密度为 $F_X(x)$ (与 $f_X(x)$), 随机变量 $Y = g(X)$, 则有两种方法求分布函数与概率密度。
 Δ ① 定义法, 直接由定义求 Y 的分布函数 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$ $\rightarrow$ 反解 $F_X(y) = P\{-X \leq y\} \rightarrow 0, +\infty, -\infty$

First: $F_Y(y) \triangleq P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$

$f_Y(y) = F'_Y(y)$, (不可导点任写)

[例1] 设 $X \sim f_X(x) = \frac{k}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(1) 求 k (2) 随机变量 $Y = 1 - X^2$ 的 $f_Y(y)$ 。

[分析] (1) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow k = 1/\pi$

(2) $Y \sim F_Y(y) \triangleq P\{1 - X^2 \leq y\} = P\{(1-y)^2 \leq X^2\}$

又 $\because X \sim f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\rightarrow$ 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$

$\therefore P\{(1-y)^2 \leq X^2\} = \int_{(1-y)^2}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(1-y)^2 \right]$

$\therefore f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3(1-y)^2}{1+(1-y)^2} \right) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{(y-1)^2}{1+(y-1)^2}$, $y \in \mathbb{R}$

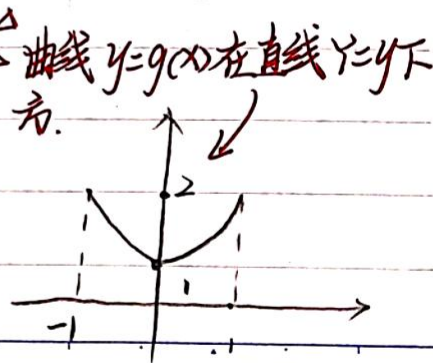
[例2] 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 令 $Y = X^2+1$, 求 $Y \sim F_Y(y)$ 。

[分析] $Y \sim F_Y(y) \triangleq P\{Y \leq y\} = P\{X^2+1 \leq y\}$ $\rightarrow$ 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$

① $y < 1$, $F_Y(y) = 0$

② $y \geq 2$, $F_Y(y) = 1$

③ $1 \leq y < 2$, $F_Y(y) = P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\}$



KOKUYO
正概率 P 区间 12

$$= \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f_X(x) dx = \int_{-\sqrt{y-1}}^0 (1+x) dx + \int_0^{\sqrt{y-1}} (1-x) dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-\sqrt{y-1}}^0 + x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{y-1}}$$

$$= 0 - (-\sqrt{y-1} + \frac{y-1}{2}) + (\sqrt{y-1} - \frac{y-1}{2}) = 2\sqrt{y-1} - y + 1$$

故 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 2\sqrt{y-1} - y + 1, & 2 > y \geq 1 \end{cases}$ (等号 follow 大于号, 有连续性)

而 $f(x)$ 并没有要求.

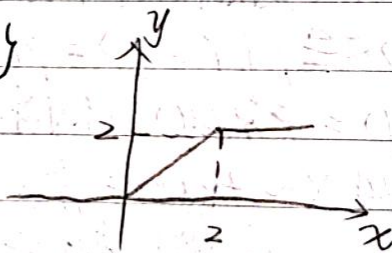
$y \geq 2 \leftarrow$ 单点无所谓 $\leftrightarrow$ "不影响积分"

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1} - 1, & 2 > y > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

△ [例3] 设某设备开机后无故障工作时间 $X \sim E(\lambda)$, 平均无故障时间为 5 小时; 设备定时开机, 出现故障自动关机, 而无故障工作小时即关机, 求设备每次工作时间 Y 的分布函数.

[分析] $Y = \begin{cases} 2, & X \geq 2 \\ X, & X < 2 \end{cases} = \min\{X, 2\}$

$$X \sim F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$$F_Y(y) \triangleq P\{Y \leq y\}$$

∴ ① $y < 0$, $P\{Y \leq y\} = 0 = F_Y(y)$

② $y \geq 2$, $P\{Y \leq y\} = 1 = F_X(y)$

③ $2 > y > 0$, $F_Y(y) = P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\frac{y}{5}}$

故 $F_{Y0}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & 2 \leq y \end{cases}$

第三讲 多维随机变量及分布

 $z = g(x, y)$, z 仍为一维

一、基本概念

假设: 1° x -维, $y = g(x)$ -维 2° (x, y) -二维, $z = g(x, y)$ -三维[注] $z = \max/\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 一般出现于统计学. — “主体研究”1. 二维 r.v. (random variables) (x, y) 2. 联合分布函数 $\Delta F(x, y) \triangleq P\{X \leq x, Y \leq y\} = A \cap B$ Δ 3. 边缘分布函数, 若 $(X, Y) \sim F(x, y)$, 则

$$F_X(x) = P\{X \leq x, Y \leq +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = A \cap J_2$$

$$F_Y(y) = P\{X \leq +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = J_2 \cap B$$

4. 独立性

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Leftrightarrow X, Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{例] 设 } (X, Y) \sim F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

问 X, Y 是否独立.

$$\text{解] } F_X(x) \triangleq \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$F_Y(y) \triangleq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1 - e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\therefore F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore F_X(x) \cdot F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = F(x, y)$$

 $\Rightarrow$ 成立, 独立5. 离散型 $(X, Y) \sim$ 阿联合分布律

$X \backslash Y$	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_j		其中: $P(X = x_i) = p_{i\cdot}$
X_1					$P_{1\cdot}$	$P(Y = y_j) = p_{\cdot j}$ “ $\forall i, j$ ”
X_2					$P_{2\cdot}$	且 $p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} = p_{ij} \Leftrightarrow X, Y$ 独立
$\vdots$						
X_i					$P_{i\cdot}$	
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$		$p_{\cdot j}$		

“ y 的边缘分布律”“ x 的边缘分布律”

[注] 关注 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ “联合” “边缘” $\rightarrow$ 条件 = $\frac{\text{联合}}{\text{边缘}}$

$$P(X=x_i | Y=y_j) = P(X=x_i, Y=y_j) / P(Y=y_j) = p_{ij} / p_{.j}$$

同理 $P(Y=y_j | X=x_i) = P(X=x_i, Y=y_j) / P(X=x_i) = p_{ij} / p_{i.}$

例1 设 $x_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $x_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 且 $P(x_1 x_2 = 0) = 1$.

(1) 求 $(x_1, x_2) \sim p_{ij}$

(2) 求 $P(x_2=1 | x_1=0)$

(3) 问 x_1, x_2 是否独立.

[分析] 联合分布律是充分条件 $\Rightarrow$ 条件. 反之不可

(1)

$x_2 \backslash x_1$	-1	0	1	边缘
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
边缘	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\Rightarrow$ “边缘分布来自联合分布律”

(2) $\therefore P(x_2=1 | x_1=0) = p_{01} / p_{0.} = \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = 1$

(3) $P(0,0) = 0 \neq P_X(0) \times P_Y(0) = \frac{1}{4}$, 故不独立

例2 设 X, Y 独立, 下表请填空

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

Δ 如 $(X, Y) \sim f(x, y)$
 $= \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$

Δ 连续型 r.v. $(X, Y) \sim f(x, y)$ 联合概率密度

Δ 边缘 $f_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

Δ 独立性) $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y) \Leftrightarrow X, Y$ 独立.

$F_X(x) \cdot F_Y(y) = F(x, y)$

$p_{i.} \cdot p_{.j} = p_{ij}$

二维几何概型(均匀)

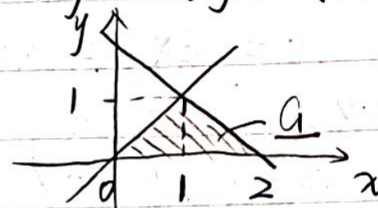
“二维正态分布”

$(X, Y) \sim f(x, y) =$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ "条件=联合"
 非0
 边缘

例1 已知 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布, G 由 $x-y=0$, $x+y=2$ 与 $y=0$ 围成. 求:



(I) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$

(II) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

(III) X, Y 独立性

分析 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 口诀: 求谁不积谁

(I) $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 不积先定限

$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 限内画条线

先交与下限

后交与上限

$\therefore X \sim f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 dy, & 0 < x < 1 \\ \int_0^{2-x} 1 dy, & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^{2-y} 1 dx, & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2-2y, & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(II) $f_{X|Y}(x|y) = f(x,y) / f_Y(y) = 1/(2-2y), 0 < y < 1$

$\therefore f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1/(2-2y), & 0 < y < 1 \text{ 且 } y < x < 2-y \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 交G

第四讲 数字特征: (1) EX 期望 (2) DX , G^2 方差 (3) $Cov(X, Y)$ 协方差 (4) ρ_{XY} 相关系数

一、基本概念

1. 数学期望

① $X \sim p_i \Rightarrow EX = \sum p_i x_i$, 离散型

如 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow EX = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6}$

若 $X \sim p_i$ 且 $Y = g(X) \Rightarrow EY = \sum g(x_i) p_i$; 随机变量函数

② $X \sim f(x) \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ $p_i \rightarrow$ 概率(概率)未变

若 $Y = g(X) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

例1 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2}, & 1 \leq x \end{cases}$, 记 $Y = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases} = g(x)$, 则 $EY =$

分析 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} Y \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 0 \cdot \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 1 \cdot \frac{1}{2x^2} dx + \int_2^{+\infty} 2 \cdot \frac{1}{2x^2} dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2x^2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$= \left[-\frac{1}{2x} \right]_{\frac{1}{2}}^2 - \left[\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty}$

$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0 - \frac{1}{2}) = 1$

2. 方差 $DX \triangleq E(X - EX)^2$

(1) 定义法: $Y = (X - EX)^2 \Rightarrow$ 随机变量函数

$$\therefore EY = \sum p_i (x_i - EX)^2$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

(2) 公式法 $E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2EX \cdot X + EX^2) = EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2$

$$= EX^2 - (EX)^2 \triangleq DX$$

例1 求上述的 DX .

分析 已知 EY , 需求 $E(Y^2) \rightarrow$ 改变了记号制度

故 $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x^2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{4}{x^2} dx$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0 - \frac{1}{2}) \times 2 = 1.5$$

$$\therefore D(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 0.5$$

3. 协方差 $Cov(X, Y)$. 两个变量的波动关系, 协同相关程度

$$Cov(X, Y) \triangleq E(X - EX)(Y - EY)$$

$$(\text{若 } X=Y, Cov(X, X) = E(X - EX)(X - EX) = E(X - EX)^2 = DX)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY - X \cdot EY - Y \cdot EX + EX \cdot EY) = \underline{E(XY) - EX \cdot EY}$$

4. 相关系数 ρ

$$\rho_{XY} \triangleq Cov(X, Y) / \sqrt{DX \cdot DY}$$

二、例题

例1 设 A, B 为二随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$

$$\text{令 } X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求 (I) 二变量 (X, Y) 的概率分布

(II) X, Y 的相关系数 ρ_{XY}

$$(III) Z = X+Y \text{ 的概率分布. } P(AB) = P((\Omega - A)B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$\text{分析 I } P(A) = \frac{1}{4} \quad P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore (I) \begin{array}{c|cc|c} XY & 0 & 1 & \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ \hline 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

$$EX^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow DX = \frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16}$$

$$EY^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow DY = \frac{1}{6} - (\frac{1}{6})^2 = \frac{5}{36}$$

“五项均求”

$$(II) \text{ 对 } X \quad EX = \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \quad DX = \frac{3}{4} \times (1 - \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{64}$$

$$\text{对 } Y \quad EY = \frac{5}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} \quad DY = \frac{1}{6} \times (1 - \frac{1}{6})^2 = \frac{25}{216}$$

$$E(XY) = \frac{3}{4} \times 0 \times 1 + 1 \times 1 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$\rho_{XY} = Cov(X, Y) / \sqrt{DX \cdot DY} = \frac{1}{24} / \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{5}}{6} \right) = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$(III) EZ = E(X+Y) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) \times 1 + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

第五讲 数理统计初步

一 基本概念

1. 总体与样本

(1) 总体: 研究对象总体的某个指标 $X \sim F$; 正态分布

(2) 样本: 简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$, 独立抽取与总体具有相同分布的样本.

2. 估计方法

(1) 矩估计 $EX \stackrel{\Delta}{=} \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (均值)

例1 设来自iid的样本 $X_1, X_2, \dots$, 总体 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$, 其中 $0 < \theta < \frac{1}{3}$, 求未知参数 θ 的矩估计量.

分析 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\Delta}{=} \bar{X} \stackrel{\Delta}{=} EX = -2\theta + 2 - 6\theta = 2 - 8\theta$

抽样数据已知 $\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2 - \bar{X}}{8}$ (θ 的估计)

量: 大写 X
值: 小写 x .

数理统计初步

引言 统计学 (statistics)

例1 不同原因所引起的寿命损失 (估计)

例2 31位自然死之美国总统的寿命表 (检验问题)

概率论专题：多维随机变量函数的分布

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} \text{离+离} \\ \text{连+连} \\ \text{离+连} \end{cases}$$

【例1】(2018) 设 X 与 Y 相互独立, $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$, 设 Z 的概率分布。(律)

一双离散

【分析】 $P\{Y=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, ($k=0, 1, 2, \dots$) 非负整数

Z 的所有可能取值为全体整数

1° $P\{Z=0\} = P\{Y=0\} = e^{-\lambda}$ (独立)

2° $n=1, 2, \dots$ $P\{Z=n\} = P\{X=1\}P\{Y=n\} = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

3° $n=-1, -2, \dots$ $P\{Z=n\} = P\{X=-1, Y=-n\} = P\{X=-1\}P\{Y=-n\} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^{-n}}{(-n)!} e^{-\lambda}$ (独立)

【例2】设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(I) $X \sim f_X(x)$, $Y \sim f_Y(y)$

△△(II) $Z = 2X - Y$ 的 $f_Z(z)$

【解】(I) $f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{2x} 1 dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 1 dx, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

也易知 X, Y 不独立。

△ $P\{(x, y) \in D_Z\} = \iint_{D_Z} f(x, y) d\sigma$, $D_Z \cap D_Z$

△(II) $F_Z(z) \triangleq P\{Z \leq z\} = P\{2X - Y \leq z\}$ (即求重积分) △取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$

$D_Z = \{2X - Y \leq z\}$, 看 $D_Z \cap D_Z$

动区域=重积分

1° $z < 0$, $D_Z \cap D_Z = \emptyset$ 故 $F_Z(z) = 0$

2° $0 \leq z < 2$ $F_Z(z) = 1 - \int_{\frac{z}{2}}^1 \int_0^{2x-z} 1 dy dx = \int_{D_Z \cap D_Z} f(x, y) d\sigma$
 $= 1 - (1 - \frac{z}{2}) \times \frac{1}{2} \times (2 - z) = z - \frac{z^2}{4}$

3° $2 \leq z$, $F_Z(z) = 1 = \iint_{D_Z} f(x, y) d\sigma$

∴ 可得 $F_Z(z)$, 对其求导得

$$f_z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad *$$

△ 常用的卷积公式

设二维连续随机变量 $(X, Y) \sim (x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 也为随机连续变量, 且

$$Z \sim f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy.$$

特别地, 若 X, Y 独立得

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$$

上注例1 $F_z(z) \triangleq P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{D_z} f(x, y) d\sigma$

$$\textcircled{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \xrightarrow{u=y+x} \text{先换元(易导)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, u-x) du \xrightarrow{\text{换序}} \int_{-\infty}^z du \int_{-\infty}^u f(x, u-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^z g(u) du$$

$$= F_z(z)$$

$$\therefore f_z(z) = F'_z(z) = g(z) = \int_{-\infty}^z f(x, z-x) dx \quad *$$

$$\textcircled{2} \text{ 若存在独立性 } f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx$$

$$\textcircled{2} F_z(z) = P\{X+Y \leq z\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \xrightarrow{u=x+y}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^z f(u-y, y) du = \int_{-\infty}^z dy \int_{-\infty}^{u-y} f(u-y, y) dy$$

$$\therefore f_z(z) = F'_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

在独立性条件下 $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$

上注例1 设 X, Y 相互独立, 设其概率密度为

$$f_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解: $Z \sim f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx$ → 常数

其中 $f_y(z-x) = \begin{cases} e^{x-z}, & z-x > 0 \\ 0, & z-x \leq 0 \end{cases}$

$$0, \text{ 当 } z-x \leq 0$$

→ 常数

△ z 视为常数, 且 z 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$. $0 \leq x \leq 1$ 并且 $-\infty < x < z$, 两数轴交叉

$$\therefore f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \int_0^z e^{-(z-x)} dx, & 0 \leq z < 1 \\ \int_0^1 e^{-(z-x)} dx, & 1 \leq z \end{cases}$$

$$\text{故 } z \sim f_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-z}, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{e-1}{e^z}, & 1 \leq z \end{cases} \quad *$$

解: $z \sim f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$

(1) $f_y(y)$ 照抄 $y > 0$

(2) $f_x(z-x) \rightarrow f_x(z-y) = \begin{cases} 1, & z-y \leq z-y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

△ (3) z 为常数, 取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$ $y > 0$ 且 $z-1 \leq y \leq z \Rightarrow$ 动域-元积分

$$\therefore f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^z e^{-y} dy & 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^z e^{-y} dy & 1 \leq z \end{cases} = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 \leq z < 1 \\ \frac{e^{-z+1} - e^{-z}}{e^{-1} - e^{-z}} & 1 \leq z \end{cases}$$

$X \sim p_X, Y \sim f_Y(y)$

例1 设 X, Y 相互独立, $P\{X=z\} = \frac{1}{3}, z = -1, 0, 1$. $Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
记 $Z = X+Y$, 求 $Z \sim f_Z(z)$. 解法 → 全集分解且独立.

$$\begin{aligned} \text{分析 } F_Z(z) &\triangleq P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = P\{X \leq z \mid X=0\} P\{X=0\} \\ &+ P\{X+Y \leq z \mid X=1\} P\{X=1\} + P\{X+Y \leq z \mid X=-1\} P\{X=-1\} \\ &= \frac{1}{3} [P\{Y \leq z+1\} + P\{Y \leq z\} + P\{Y \leq z-1\}] \\ &= \frac{1}{3} [F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)] \end{aligned}$$

$$\because Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{3} [f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)]$$

$$\text{故 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad *$$

第一讲. 随机事件与概率

用古典、几何公式求复杂事件概率

一. 引言

1. 五大问题

(1) 求 $P\{\text{复杂事件}\}$

(2) ① X 的 $F_X(x), f_X(x)$ ② $Y=g(X)$ 的 $F_Y(y), f_Y(y)$ ③ $P(X \in I) = \int_I f_X(x) dx$

④ (X, Y) 的 $F(x, y), f(x, y)$ ⑤ $Z=g(X, Y)$ 的 $F_Z(z), f_Z(z)$

⑥ $P\{(x, y) \in D\} = \iint_D f(x, y) d\sigma$

(3) 求数字特征 $EX, DX, \text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$

(4) $n \rightarrow \infty$ 的若干重要概率规律 (五个)

(5) 估计与评价

二. 古典概型求概率

定义: 若 Ω 中有有限个等可能的样本点, 称为古典概型 $\Rightarrow P(A) = \frac{A \text{ 中样本点个数}}{\Omega \text{ 中样本点个数}} = \frac{k}{n}$

【例1】将3个球随机放入4个盒子内, X 表示有球的盒子, Y 表示第1个盒子内球的个数.

求: (I) $P\{X=1, Y=0\}$ (II) $P\{X=2, Y=1\}$ (III) $P\{X=3, Y=2\}$

【分析】(I) $P_1 = 3/4^3 = 3/64$ X 的可能值 1, 2, 3

(II) $P_2 = C_3^1 C_3^2 C_3^1 / 4^3 = 9/64$ Y 的可能值 0, 1, 2, 3

(III) $P_3 = 0$ "每个球都不一样"

△ 三. 几何概型求概率

若 Ω 是一可度量的几何区域, 且样本点落入 Ω 中的某一可度量子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比, 而与 A 的位置与形状无关, 则称为几何概型.

$P(A) = A \text{ 的度量} / \Omega \text{ 的度量}$

【例1】设大桥将于7点到7点较间到达河岸, 架桥需20分钟, 部队将于7:30到8点之间达河岸, 求部队到达时可立即过河的概算.

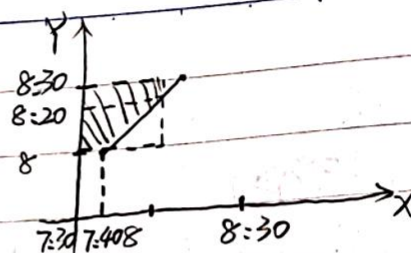
【分析】设 X 为大桥到达的时间, Y 为部队到达的时间

$P = P\{X+20 \leq Y\}, X \in [7:30, 8] Y \in [8, 8:30]$

$$\therefore \text{如图所示 } P = S/36 = 1 - 20 \times \frac{1}{2} / 36 = 7/9 \quad \#$$

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 30, 30 \leq y \leq 60\}$$

$$A = \{(x, y) \mid x+20 \leq y \cap \Omega\}$$



三、重要公式求概率

1. 对立 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 周知方法

2. 减法 $P(A\bar{B}) = P(A-B) = P(A) - P(AB)$

3. 加法 (1) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$(2) P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

例1-学生去3个图书馆借书, 每个图书馆有50%可能有书, 50%已借出, 若已知每个图书馆藏书相互独立, 求可借到这本书的概率.

分析: 设 $A = \{\text{能借到书}\}$, $A_i = \{\text{能在第 } i \text{ 个馆借到书}\}$

$$+ P(A_1 A_2 A_3)$$

$$\therefore P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3)$$

$$= 3 \times \frac{1}{4} - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 37/64 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \quad \#$$

$$\text{独立} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

注: 超过三个和的事件一般附加"互斥"或"独立"条件.

① 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 则 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$; $P(A_i A_j) = 0$

② 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若对任意有限个 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ 均有 $(k \geq 2)$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 即

$$P(AB) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

n 个事件相互独立 $\Leftrightarrow$ 它们中任意部分变为对立, 所得 n 个相互独立.

$$P(A)P(B) \quad \#$$

若 A, B 独立 $\Leftrightarrow A, \bar{B}$ 与 $\bar{A}, B$ 相互独立

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)]$$

③ 常考 $k=3$ 的情况

$$P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$\Rightarrow P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \quad \#$$

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 A_2) &= P(A_1) P(A_2) & ① \\ P(A_2 A_3) &= P(A_2) P(A_3) & ② \\ P(A_1 A_3) &= P(A_1) P(A_3) & ③ \\ P(A_1 A_2 A_3) &= P(A_1) P(A_2) P(A_3) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow A_1, A_2, A_3 \text{ 相互独立}$$

若①②③满足, 则为三三独立.

【例】将一枚硬币独立掷两次, 引入事件: $A_1 = \{\text{第一次正面}\}$ $A_2 = \{\text{第二次正面}\}$

$A_3 = \{\text{正反面各一次}\}$ $A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$. 则 ()

A. A_1, A_2, A_3 相互独立 B. A_2, A_3, A_4 相互独立

C. A_1, A_2, A_3 两两独立 D. A_2, A_3, A_4 两两独立

【分析】 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ $P(A_3) = \frac{1}{2}$ $P(A_4) = \frac{1}{4}$

$$P(A_1 A_2 A_3) = 0 \quad P(A_2 A_3 A_4) = 0 \quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad P(A_1 A_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_3 A_4) = 0 \quad \text{故选 C.} \quad P(A_1 A_4) = P(A_2 A_4) = \frac{1}{4}$$

4. 条件 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$, $P(B) > 0 \rightarrow$ “在...发生条件下”

5. 乘法 $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$ “已知发生了...”

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) \quad \text{“独立: } P(A|B) = P(A)”$$

6. 全集分解公式

完备事件组

一个试验可人为分成两个阶段, 且

$$\Delta P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B(A_1 \cup A_2 \cup A_3))$$

(I) 阶段可能结果不知道哪个发生

$$= P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

求 (II) 阶段结果发生的概率

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

【例】中国人血型分布为, 现为抽两人, 问甲给乙输血的概率

	O	A	B	AB
A1	0.41	0.28	0.24	0.07

【分析】记 $A = \{\text{甲能给乙输血}\}$

完备 $\leftarrow B_1, B_2, B_3, B_4$ 分别为 {甲为 O, A, B, AB 型}

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)$$

$$= 0.41 + 0.28 \times (0.28 + 0.07) + 0.24 \times (0.24 + 0.07) + 0.07^2$$

$$= 0.587$$

【例】一批产品共 100 件, 随机 3 件测试且独立. 如果任意一件不合格, 则被拒绝. 设一件产品的被认为不纯为 0.01, 不纯被查出为 0.95. 已知 100 件中有 4 件不纯, 问被接收

的概率.

[分析] $A = \{\text{接收}\}$ $H_i = \{\text{随机三件有 } i \text{ 件不纯}\} (i=0, 1, 2, 3)$

$$(1) \text{古典 } P(H_i) = \frac{C_3^i C_{97}^{3-i}}{C_{100}^3} \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

$$(2) P(A|H_0) = (0.05)^3 (0.99)^{3-3}$$

$$\therefore P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0.86$$

7. 贝叶斯公式

已知A发生, 求 $P(B_i|A)$, $P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=0}^n P(B_j)P(A|B_j)}$

[例1] 甲袋中有3白2黑, 乙袋中有4白1黑. 先从甲中先取两球放入乙袋, 再从乙中抽出一球, 求取出白球的概率P. 如果已知从乙中取出白球, 问从甲中取出一白一黑的概率.

"有且仅有"

[分析] $A_i = \{\text{从甲中取出 } i \text{ 个白球}\} (i=0, 1, 2)$ $B = \{\text{在乙中取白}\}$

$$P(A_i) = \frac{C_3^i C_2^{2-i}}{C_5^2}, \quad P(A_0) = \frac{1}{10}, \quad P(A_1) = \frac{6}{10}, \quad P(A_2) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{52}{100}$$

$$\therefore q = P(A|B) = 30/52 = 15/26. \quad \text{"因果关系, 概率关系改变"}$$

第二讲 一维随机变量及其分布

综述：八个重要分布 一维 X 与 $F(x)$ $Y=g(X)$ 与 $F_Y(y)$

一、概念与八个分布 Δ 随机变量 $\leftarrow X = X(\omega), \omega \in \Omega$

1. X 与 $F(x)$ $Y = y(x), x \in \mathbb{R}$

(1) 随机变量 (r.v.) 定义在 $\Omega = \{\omega\}$ 上, 取值在实数轴上的变量

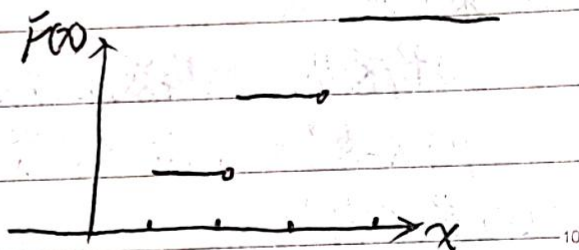
$X = X(\omega), \omega \in \Omega; y = y(x), x \in \mathbb{R}$. "定义在样本空间, 取值在 $\mathbb{R}$ 轴"

Δ (2) 分布函数 $F(x) \triangleq P\{X \leq x\}, -\infty \leq x \leq +\infty$. Δ 取遍 $-\infty$ 到 $+\infty$, 累加函数

2. 离散型随机变量

(1) 定义 X 取有限个或无穷可列个, $\omega \mapsto x$

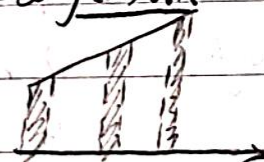
(2) 分布律 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$



(3) $F(x) \triangleq P\{X \leq x\}$ 离散型 r.v. $\Leftrightarrow$ 步步高所梯型 $F(x)$

Δ 3. 连续型随机变量

若有非负可积 $f(x)$, 使得对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \rightarrow$ "可能性"
则称 X 为连续型, $f(x)$ 叫作 X 的概率密度函数.



[注] $F(x) \triangleq P\{X \leq x\} = P\{-\infty < X \leq x\}$

$$= \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ (连)} = \sum_{x_i \leq x} p_i \text{ (离散)}$$

4.

$p_i \rightarrow$ 分布律

$X \sim F(x) \rightarrow f(x) \rightarrow$ 概率密度

(1) $F(x)$ 为某个 X 的分布函数 $\Leftrightarrow$ ① 单调不减 ② $F(-\infty)=0$ $F(+\infty)=1$

Δ ③ 连续右 — "等号跟着大于号走"

(2) $\{p_i\}$ 为分布律 $\Leftrightarrow$ ① $p_i \geq 0$ ② $\sum p_i = 1$ (归一性)

Δ (3) $f(x)$ 为概率密度 $\Leftrightarrow$ ① $f(x) \geq 0$ Δ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ (归一性)

5. 八个分布 五的离散三个连续

(1) 0-1 分布 (Ber-1) X (伯努利计数变量) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

(2) 二项分布 可重

(Ber- n): ① 独立 ② $P(A)=p$ ③ 只有 $A, \bar{A}$

记X为A发生的次数, 则

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

(3) 几何分布 (Bern-Eoo)

首中即停止 (等待型分布), 记X为试验次数, 则

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k=1, 2, \dots$$

$$EX = \frac{1}{p} \quad DX = (1-p)/p^2$$

(4) 超几何分布

N件商品, M件正品, 不放回取n次, 则取到k个正品 $\max\{0, n-m\} \leq k \leq \min\{n, m\}$

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

△(5) 泊松分布

某单位时间段, 某场合下, 源源不断质点来留的个数也描述稀有事件的概率.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \Delta EX = \lambda \quad DX = \lambda \quad \lambda \text{ 为强度}$$

△(6) 均匀分布 “几何模型” $U(a, b)$

若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ (正概率区间)} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $X \sim U[a, b]$.

△△△注: X在I上的任一子区间取值的概率与该子区间的长度成正比.

△△(7) 指数分布. 等待型分布 (连续型寿命分布)

若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $X \sim E(\lambda)$, λ 为失效率. “ $\lambda \uparrow \Rightarrow EX \downarrow$ ”

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$F(x) \triangleq P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

“x取遍 $-\infty$ 至 $+\infty$ ”

例1 (求分布函数) 确定下列核函数a的值, 并求分布函数.

$$(I) f_1(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}; \quad (II) f_2(x) = \begin{cases} a e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

[分析] 归一性运用.

$$(I) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{a}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2a \cdot \arcsin t \Big|_0^1 = a\pi = 1$$

$$\Rightarrow a = 1/\pi$$

$$F(x) \triangleq P\{X \leq x\} \quad 1^\circ \quad x < -1 \quad F(x) = 0$$

$$= \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad 2^\circ \quad -1 \leq x < 1 \quad F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\arcsin x}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$x \text{ 取遍所有 } -\infty \text{ 至 } +\infty. \quad 3^\circ \quad 1 \leq x \quad F(x) = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{\arcsin x}{\pi} + \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$(II) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt = \int_{-\infty}^0 a e^x dx + \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$F(x) \triangleq P\{X \leq x\} \quad 1^\circ \quad x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} a e^x dx = \frac{1}{2} e^x$$

$$= \int_{-\infty}^x f_2(t) dt. \quad 2^\circ \quad 0 \leq x < 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^x \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

$$x \text{ 取遍 } -\infty \text{ 至 } +\infty. \quad 3^\circ \quad 2 \leq x \quad F(x) = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

(8) [注] ① $P\{X \geq t+s | X \geq t\} = P\{X \geq s\}$, 无记忆性

$$② F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \text{ (记忆)} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

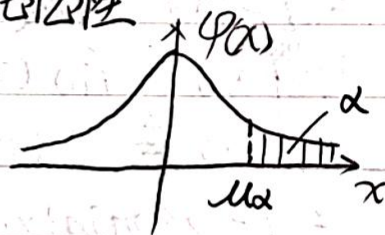
③ $\begin{cases} \text{几何分布} \Rightarrow \text{离散型等待分布} \\ \text{指数分布} \Rightarrow \text{连续型等待分布} \end{cases} \Leftrightarrow \text{无记忆性}$

(8) 正态分布 (高斯分布)

$$\text{若 } X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

$$[注] \mu=0, \sigma=1, \text{ 则 } X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, X \sim \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

$X \sim N(0,1)$ 标准正态专用符号



二. 综合题分析

1. 概念 4' 2. $X \sim F(x)$ 11' 3. $Y = g(X) \sim F(y)$

例1 下列说法错误的是 ()

A. X_1, X_2 相互独立, $X_1 \sim F_1(x)$ $X_2 \sim F_2(x)$ 则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为 $\max\{X_1, X_2\}$ 的分布函数.

B. 若 $X \sim f(x) = A e^{-\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$, 则 $A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

C. 若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且 $P\{X \leq k\} = \frac{2}{3}$, 则 $k < 1$;

D. 若 $X \sim F(x)$, $X \sim f(x)$ 且 $x \leq 0$ 时 $f(x)$ 连续, $f(x) = F(x)$, $F(0) = 1$, 则 $f(x) = e^x$, $x < 0$; $0, x \geq 0$.

[分析] A. 记 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 求 $X \sim F(x)$

$$F(x) \triangleq P\{X \leq x\} = P\{\max\{X_1, X_2\} \leq x\} = P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq x\} \\ = F_1(x) F_2(x), \checkmark \quad \Delta \text{ 独立性}$$

[注] 有一组 r.v. 独立同分布于某一分布, $X_i \stackrel{iid}{\sim} F(x)$, 简单随机抽样.

按大小顺序排列 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, 其中 $X_{(n)}$ 为第 n 顺序统计量.

$X_{(1)}$ 为第一顺序统计量, $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 记

计算 $X_{(n)} \sim F_{(n)}(x)$

$$F_{(n)}(x) \triangleq P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x\}$$

$$= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \stackrel{iid}{=} F(x) P\{X_1 \leq x\} \dots P\{X_n \leq x\}$$

$$= [F(x)]^n \quad \Delta \text{ 故 } F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$$

计算 $X_{(1)} \sim F_{(1)}(x)$

$$F_{(1)}(x) \triangleq P\{X_{(1)} \leq x\} = P\{\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x\}$$

$$\stackrel{iid}{=} 1 - P\{\min\{X_1, \dots, X_n\} > x\} = 1 - P\{X_1 > x, \dots, X_n > x\}$$

$$\stackrel{iid}{=} 1 - P\{X_1 > x\} \dots P\{X_n > x\} = 1 - [1 - F(x)]^n$$

$$\Delta \text{ 故 } F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

B. 参考正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$$\text{现在 } f(x) = A e^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = A e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow \mu = -1 \quad \sigma = \sqrt{2}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

C. $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3} \Rightarrow k \in [1, 3]$

$\Delta P(X \in I) = \int_I f(x) dx$

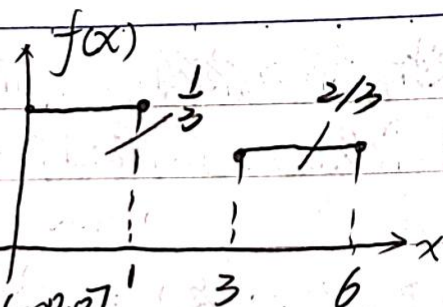
D. 当 $x \leq 0$ 时 $f(x) = dF(x)/dx = F(x)$

$\Rightarrow \ln F(x) + C' = x \Rightarrow F(x) = Ce^x, (-\infty, 0]$

又 $\because F(0) = 1 \therefore F(x) = e^x, (-\infty, 0]; 1, x > 0$

$\hookrightarrow F(x) = 1, x > 0$

$\therefore f(x) = \begin{cases} e^x, & (-\infty, 0] : \text{在 } x=0, F(x) \text{ 为不可导点} \\ 0, & (0, +\infty) \end{cases}$ 在不可导点, 任意赋 $f(x)$.



例3 设 $|X| \leq 1, P\{X = -1\} = \frac{5}{8}, P\{X = 1\} = \frac{1}{8}$, 在 $-1 < X < 1$ 发生的条件下, X 在 $(-1, 1)$ 内任一子区间取值的条件概率与该子区间长度成正比, 求 $F(x)$.

分析 1° $x < -1, F(x) = 0$ 2° $x \geq 1, F(x) = 1$

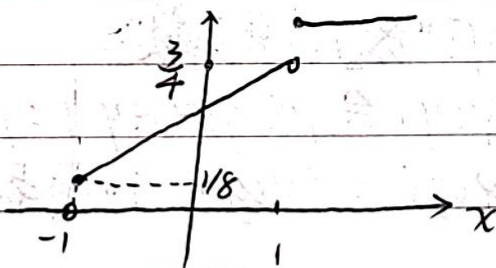
$P\{-1 < X < 1\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = 5/8$

3° $-1 < x < 1, F(x) \triangleq P\{-1 \leq X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{-1 < X \leq x\}$

$= \frac{1}{8} + P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} \times P\{-1 < X < 1\}$

$= \frac{1}{8} + \frac{x+1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5x+7}{16}$

$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$ (混合型) r.v.



$\Delta P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = \frac{x+1}{2}$

$P(A) = P(A \cup \bar{A}) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$

$= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$\therefore P\{-1 < X \leq x\} = P(-1 < X < 1)P(-1 < X \leq x | -1 < X < 1) \triangleq \text{"全集分解公式"}$

$+ P(X = -1 \vee X = 1)P(-1 < X \leq x | X = -1 \vee X = 1)$

$= \frac{5}{8} \times \frac{x+1}{2} + \frac{2}{8} \times 0 = \frac{5x+5}{16}$

例1 设一机器在任何长为 t 的时间内出故障次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。

(I) 求相继两次故障的时间间隔 T 的 $F_T(t)$

(II) 求出设备在无故障工作 8 小时下, 再工作 16 小时的概率

分析 $t \sim P(\lambda t) \sim P(t=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$ 一般化

$$\Delta P(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$(2) F_T(t) \triangleq P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t)=0\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}, \quad (\text{指数分布}) \quad t \geq 0$$

$$\therefore F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) "无记忆性" $P(N(24)=0 | N(8)=0) = \frac{e^{-24\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-16\lambda}$

$$P\{T \geq 24 | T \geq 8\} = P\{T \geq 24\} / P\{T \geq 8\} = \frac{e^{-24\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-16\lambda}$$

$$= P\{T \geq 16\} \quad \times$$

[注] 若 $X \sim f(x)$ $F(x) \triangleq P\{X \leq x\} = P\{X < x\}$

例 5 若 $X \sim f_X(x)$, $Y = g(X)$, 求 $Y \sim f_Y(y)$

分析 "随机变量函数"

$$\textcircled{1} F_Y(y) \triangleq P\{g(X) \leq y\} = P\{X \in I_y\} = \int_{I_y} f_X(x) dx$$

$\textcircled{2} f_Y(y) = f_X(x)$, 不可导点处令为 0 即可.

例 6 设随机变量 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 求 $Y = \cos X$ 的 $f_Y(y)$ "曲线在直线下" 为 X 的 I_y

分析 $F_Y(y) \triangleq P\{\cos X \leq y\}$

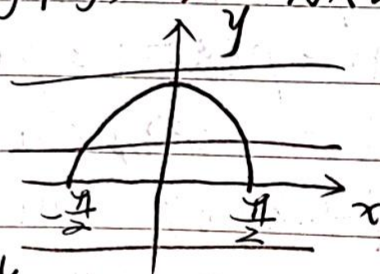
$$1^\circ y \geq 1 \quad F_Y(y) = 1$$

$$2^\circ y < 0 \quad F_Y(y) = 0$$

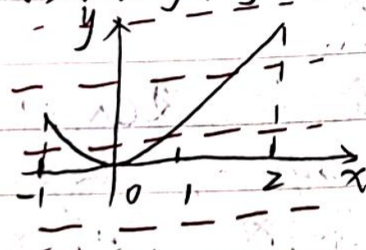
$$3^\circ 0 \leq y < 1 \quad F_Y(y) = P\{-\arccos y \leq X \leq \arccos y\}$$

$$= 1 - \int_{-\arccos y}^{\arccos y} f_X(x) dx = 1 - 2 \int_0^{\arccos y} \frac{dx}{\pi} = 1 - \frac{2 \arccos y}{\pi}$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{其他} \\ \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & 0 \leq y < 1 \end{cases}$$



例1 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, 求 $Y \sim f_Y(y)$



分析 $F_Y(y) \triangleq P\{X^2 \leq y\}$, y 从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

1° $y \geq 4$ $F_Y(y) = 1$

2° $y < 0$ $F_Y(y) = 0$

3° $0 \leq y < 1$ $F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3\sqrt{y}}{4}$

4° $1 \leq y < 4$ $F_Y(y) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4}$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{其他} \\ \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \end{cases}$

第三讲 多维随机变量及分布 $\rightarrow \iint f(x,y) dx dy = \text{二维}(x,y)$ on n 维(统计)

综述: 1. 概念 2. 用分布求概率 3. $z = g(x,y)$, 求 $z \sim$ 分布 $\hookrightarrow$ "维"

一、概念

1. 联合分布 设 (X,Y)

$F(x,y) \triangleq P\{X \leq x, Y \leq y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ Δ "条件 = 联合/边缘"

2. 边缘分布 已知 $F(x,y)$

$F_X(x) \triangleq P\{X \leq x, Y \leq +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x,y)$

$F_Y(y) \triangleq P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x,y)$

[注] ① 离散型 $(X,Y) \sim P_{ij}$ (联合分布律)

Δ 其条件概率 $P\{X = x_i | Y = y_j\} = P_{ij} / P_{\cdot j} = P_{ij} / p_{\cdot j}$

[例] 设 r.v. $X \sim f(x) = A / (e^x + e^{-x})$, 对 X 进行两次独立观察, 其结果分

别记为 X_1, X_2 , 令 $Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \leq 1 \\ 0, & X_i > 1 \end{cases} \quad i=1,2$ $\leftarrow$ "Ber-计数变量"

(I) 确定 A , 并计算 $P\{X_1 < 0, X_2 < 1\}$

(II) 求二维 r.v. (Y_1, Y_2) 的联合概率分布

[分析] (I) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{e^x + e^{-x}} dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = A \arctan e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty}$
 $= \frac{1}{2} A \pi \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}$

$\because X_1$ 与 X_2 独立 $\therefore P\{X_1 < 0, X_2 < 1\} = P\{X_1 < 0\} \times P\{X_2 < 1\}$

其中 $P\{X_1 < 0\} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \arctan e^x \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}$

$P\{X_2 < 1\} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^1 f(x) dx = \frac{2}{\pi} \arctan e^x \Big|_{-\infty}^1 = \frac{2}{\pi} \arctan e$

$\therefore P\{X_1 < 0, X_2 < 1\} = \frac{1}{\pi} \arctan e$

(II) ΔY_i

	1	0	
1	$\frac{2}{\pi} \arctan e P_{01}$	$\frac{2}{\pi} \arctan e$	$P(Y_1=1) = P\{X_1 \leq 1\} = \frac{2}{\pi} \arctan e$
0	$P(1,0)$	$1 - \frac{2}{\pi} \arctan e$	$P(0,1) = P(1,0) = \frac{2}{\pi} \arctan e - \frac{4}{\pi^2} \arctan^2 e$
	$\frac{2}{\pi} \arctan e$	$1 - \frac{2}{\pi} \arctan e$	$P(0,0) = (1 - \frac{2}{\pi} \arctan e)^2$

$\times$

② 连续 $(X,Y) \sim f(x,y)$ 联合密度

边缘密度 (必考)

$$f_X(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$$

其中 $f_{X|Y}(x|y) = f(x,y) / f_Y(y)$

③ 无论离散连续 $\Rightarrow$ 条件 = 联合 / 边缘; 联合 = 条件 $\times$ 边缘

3. 独立性

(X,Y) , X,Y 独立 $\Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

$\Leftrightarrow P_{ij} = P_{i\cdot} \times P_{\cdot j} \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

4. 两个分布

(1) 均匀分布 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 1/SD & (x,y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(2) 正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

[注] 以下重要结论, 只说不证

① 若 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

$\Rightarrow \begin{cases} X \sim N & Y \sim N & (\text{边缘为正态}) \\ aX + bY \sim N & (\text{线性组合为正态}) \end{cases}$

独立 $\Rightarrow$ 不相关 ($\rho=0$)

② 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立均服从 $N \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N$

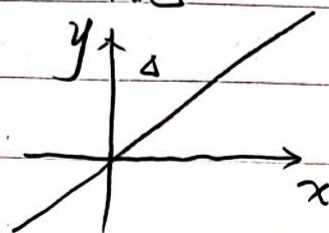
$X \sim N, Y \sim N \nRightarrow aX + bY \sim N$

二. 综合题分布

[例] 设 X 与 Y 分别表示甲乙两元件寿命, 其概率密度分别为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$
 $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$, 并设 X, Y 独立. 两元件同时工作, 求甲比乙先坏的概率.

[分析] $\because X, Y$ 独立 $\therefore f(x,y) = 2e^{-x-2y}, x, y > 0; 0, \text{其他}$

$\therefore P(\text{甲比乙先坏}) = P(X \leq Y) = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} 2e^{-x} e^{-2y} dy$
 $= \frac{1}{3} \times \iint_{x \leq y \text{ 区域}} f(x,y) dx dy$ “用分布求概率”



例1 设 $X \sim U(0,1)$, 在 $X=x$ ($0 < x < 1$) 下, Y 在 $(0, x)$ 服从均匀分布 (11')

(I) $(X, Y) \sim f(x, y)$

(II) $Y \sim f_Y(y)$ (III) $P\{X+Y > 1\}$

证明 (I) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} = f(x, y) / f_X(x), \quad 0 < y < x < 1$

$\therefore X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

" $f(x, y) \stackrel{\text{独立}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y)$
 $= f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$ "

$\therefore f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(II) $f_Y(y) = \int_{xy} f(x, y) dx$

1° $0 < y < 1$ $f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y$

2° 其他 0

$\therefore f_Y(y) \stackrel{\text{独立}}{=} \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{①} \int_y^1 \frac{1}{x} dx, \quad 0 < y < 1$

(III) $P\{X+Y > 1\} = \iint_{\{x+y > 1\} \cap D} f(x, y) d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy$
 $= \int_{\frac{1}{2}}^1 2x^2 - x dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{5}{24} = 1 - \ln 2$

要点: ①联合 ②边缘 ③条件且 ③ = ①

④独立 ⑤ $P\{(x, y) \in D\} = \iint_{D \cap D} f(x, y) d\sigma$ (11')

第四讲 数字特征

1. 数字特征 2. 应用

一、概念

1. 数学期望 (EX) 与方差 (DX)

(1) 期望定义

$$① X \sim p_i \Rightarrow EX = \sum x_i p_i$$

$$② X \sim f(x) \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$③ X \sim p_i, Y = g(X) \Rightarrow EY = \sum g(x_i) p_i$$

$$④ X \sim f(x), Y = g(x) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$⑤ (x, y) \sim p_{ij}, Z = g(x, y) \Rightarrow EZ = \sum \sum g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$⑥ (x, y) \sim f(x, y), Z = g(x, y) \Rightarrow EZ = \iint g(x, y) f(x, y) d\sigma$$

(2) 方差定义

$$DX \triangleq E[(X - EX)^2] = E(g(X))$$

$$① \begin{cases} X \sim p_i \Rightarrow DX = E[(X - EX)^2] = \sum (x_i - EX)^2 p_i \\ \text{定义法} \end{cases}$$

$$X \sim f(x) \Rightarrow DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

$$② \text{公式法 } DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

(3) 性质

$$① E a = a \Rightarrow E(EX) = EX$$

$$② \text{线性性 } E(aX + bY) = aEX + bEY, E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i \text{ (无条件)}$$

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1 EX_1 + a_2 EX_2 + \dots + a_n EX_n$$

$$③ \text{若 } X, Y \text{ 相互独立} \Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY \text{ (充分条件)}$$

$$④ Da = 0 \Rightarrow D(EX) = 0 \quad D(DX) = 0$$

$$\Delta ⑤ \text{若 } X, Y \text{ 相互独立} \Rightarrow D(X \pm Y) = DX + DY \quad D(X - Y) = DX + DY$$

$$⑥ D(aX + b) = a^2 DX, E(aX + b) = aEX + b \quad \text{"独立时 } cov(X, Y) = 0"$$

$$⑦ \text{一般 } D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X, Y)$$

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n + \sum_{i < j} 2cov(X_i, X_j)$$

△ [注]

$$① 0-1 \text{ 分布 } X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, EX = p, DX = p(1-p)$$

- ② $X \sim B(n, p)$ $EX = np$ $DX = np(1-p)$ $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0,1,\dots$
- ③ $X \sim P(\lambda)$ $EX = \lambda$ $DX = \lambda$ $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p, k=1,2,\dots$
- ④ $X \sim G(p)$ $EX = \frac{1}{p}$ $DX = \frac{1-p}{p^2}$
- ⑤ $X \sim U[a, b]$ $EX = \frac{a+b}{2}$ $DX = (b-a)^2/12$
- ⑥ $X \sim E(\lambda)$ $EX = \frac{1}{\lambda}$ $DX = \frac{1}{\lambda^2}$ (数学期望)
- ⑦ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $EX = \mu$ $DX = \sigma^2$
- ⑧ $X \sim \chi^2(n)$ 分布 $EX = n$ $DX = 2n$ "自由度"

2. 协方差 $Cov(X, Y)$ 与相关系数 ρ_{XY} .

(1) $Cov(X, Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$

$\Delta Cov(X, X) = E[(X-EX)(X-EX)] = E[(X-EX)^2] = DX$

定义法 $\Delta (X, Y) \sim f(x, y) \Rightarrow Cov(X, Y) = \iint (x-EX)(y-EY) f(x, y) dx dy$

$p(x, y) \sim p_{xy} \Rightarrow Cov(X, Y) = \sum \sum (x-EX)(y-EY) P_{ij}$

公式法 $Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY \Rightarrow$ "乘积的期望减期望的乘积"

(2) $\rho_{XY} = Cov(X, Y) / (\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY})$ $\rho=0 \Leftrightarrow X, Y$ 不相关

[例] 设 $X \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y = \cos X$, 求 ρ_{XY} . (4')

[分析] $\rho_{XY} = (E(XY) - EX \cdot EY) / \sqrt{DX \cdot DY}$

$EX = \frac{a+b}{2} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})/2 = 0$

$EY = E \cos X \stackrel{Eg(x)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \cos x f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \cos x dx = 0$

$\therefore EXY - EX EY = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0 \Rightarrow X, Y$ 不相关 $\rightarrow$ 线性相关程度

(3) 性质

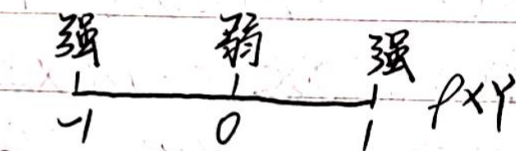
① $|\rho_{XY}| \leq 1$

② $\rho_{XY} = 1 \Rightarrow P\{Y = aX + b\} = 1 (a > 0)$

$\rho_{XY} = -1 \Rightarrow P\{Y = aX + b\} = 1 (a < 0)$

若 $Y = aX + b, a > 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 1$

$Y = aX + b, a < 0 \Rightarrow \rho_{XY} = -1$



不一定为必然事件

$P(A)=1 \Leftrightarrow A \supseteq \Omega$

[例] 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正向与反向的次数, 求 ρ_{XY} .

【例】 $X+Y=n \Rightarrow X, Y$ 完全线性且负相关 $\Rightarrow \rho_{XY} = -1$

③ $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

④ $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$

⑤ $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ (单个可拆性)

$$Cov(X_1+X_2, X_3+X_4) = Cov(X_1, X_3+X_4) + Cov(X_2, X_3+X_4)$$

$$= Cov(X_1, X_3) + Cov(X_1, X_4) + Cov(X_2, X_3) + Cov(X_2, X_4)$$

【小结】五个重要条件

① $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 0 \Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY$
 $\Rightarrow D(X+Y) = DX + DY = D(X-Y)$

② 若 X, Y 独立 $\Rightarrow \rho_{XY} = 0$

③ 若 $(X, Y) \sim N \Rightarrow X, Y$ 独立 $\Leftrightarrow X, Y$ 不相关 ($\rho_{XY} = 0$)

二、综合题解析

【例】试验成功概率 $\frac{3}{4}$ ，失败概率 $\frac{1}{4}$ ，独立重复直至成功两次，求试验次数 X 的 EX .

【分析】 $P\{X=k\} = C_{k-1}^1 (\frac{3}{4})^2 (\frac{1}{4})^{k-2} = 9(k-1)4^{-k}, k=2, 3, \dots$ 无穷可列

$$EX = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot C_{k-1}^1 (\frac{3}{4})^2 (\frac{1}{4})^{k-2} = \frac{9}{16} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} \Big|_{x=\frac{1}{4}} \rightarrow (x^k)' = k(x^{k-1})'$$

$$= \frac{9}{16} \sum_{k=2}^{\infty} (x^k)'' \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{9}{16} (\sum_{k=2}^{\infty} x^k)'' \Big|_{x=\frac{1}{4}}$$

级数求和+逐层求导

$$= \frac{9}{16} (\frac{x^2}{1-x})'' \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{1}{4}} = 8/3$$

【例】 T 为连续型, $t \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1, \lambda, \mu > 0$, 满足 $P\{T > t\} = \alpha e^{-\lambda t} + (1-\alpha)e^{-\mu t}$, 求 EX 与 DX .

【分析】 $F_T(t) \triangleq P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - \alpha e^{-\lambda t} - (1-\alpha)e^{-\mu t}, t \geq 0$
 $f_T(t) = [F_T(t)]' = \alpha \lambda e^{-\lambda t} + (1-\alpha)\mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$ET = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt; \quad ET^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t) dt$$

△【注】哥氏 $\rightarrow$ 伯努利 $\rightarrow$ 欧拉 $n! \leftrightarrow \int$

记 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, x > 0 \xrightarrow{x=t} \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t} dt, t > 0$, 根据 e^{-x}

则 $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^\alpha d e^{-x} = -x^\alpha e^{-x} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

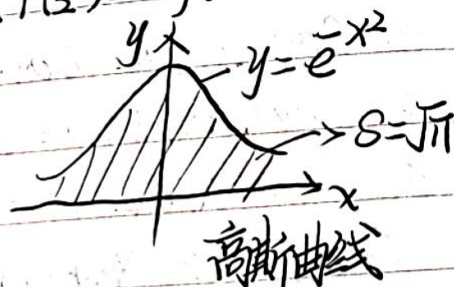
$\neq = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha \Gamma(\alpha)$ 递推关系

$$\therefore \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \text{ 且 } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1; \Gamma(3) = 2; \Gamma(4) = 6$$

$$\therefore \Gamma(\alpha+1) = \alpha! \quad \text{离散与连续交汇.}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \times \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$



应用 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda \alpha t e^{-\lambda t} + \mu(1-\alpha) t e^{-\mu t} dt$

令 $u = \lambda t$ $\int_0^{+\infty} \lambda \alpha \frac{u}{\lambda} e^{-u} \frac{1}{\lambda} du + \int_0^{+\infty} \mu(1-\alpha) \frac{u}{\mu} e^{-u} \frac{1}{\mu} du$

$$= \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du + \frac{1-\alpha}{\mu} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du$$

$$= (\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\mu}) \Gamma(2) = (\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\mu}) 1! = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\mu}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Y(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda \alpha t^2 e^{-\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} \mu(1-\alpha) t^2 e^{-\mu t} dt$$

$$= (\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{1-\alpha}{\mu^2}) \Gamma(3) = 2(\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{1-\alpha}{\mu^2})$$

$$\therefore DY = E(Y^2) - (EY)^2 = 2(\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{1-\alpha}{\mu^2}) - (\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\mu})^2$$

若求 $E(Y^4)$, 则 $E(Y^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_Y(t) dt$

$$= (\frac{\alpha}{\lambda^4} + \frac{1-\alpha}{\mu^4}) \Gamma(5) = 4! (\frac{\alpha}{\lambda^4} + \frac{1-\alpha}{\mu^4}) = 24(\frac{\alpha}{\lambda^4} + \frac{1-\alpha}{\mu^4})$$

例31 设 X, Y 独立, $X \sim N(0, \frac{1}{2}), Y \sim N(0, \frac{1}{2})$, 求 $D(X-Y)$. (4)

分析 降低维度 $|X-Y| = g(x, y) = |Z|, Z = X-Y \sim (0, 1)$

令 $Z = |X-Y|$, 则 $D(|X-Y|) = D|Z| = E Z^2 - (E|Z|)^2$

其中 $DZ = E Z^2 - (E Z)^2 \Rightarrow E(Z^2) = DZ + (E Z)^2 = 1$ 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立且

$E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \varphi(z) dz = 2 \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 均 $\sim N \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N$

令 $u = \frac{z^2}{2}$ $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$$\therefore D(|X-Y|) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

例4 (2028) 设 X, Y 相互独立, X 的分布 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$, 求 $Cov(X, Z)$.

分析 $Cov(X, Z) = EXZ - EX \cdot EZ$

其中, $EX = (1-1) \times \frac{1}{2} = 0, EXZ = EXY = EX^2 \cdot EY = \lambda$

$$\therefore Cov(X, Z) = \lambda$$

例6] $p_{XY} = 0.9$, $Z = X - 0.4$, 求 p_{YZ} .

[分析] $p_{XY} = 0.9$, 线性程度 0.9, $p_{XZ} = 1 \therefore p_{YZ} = 0.9$

$$p_{YZ} = \frac{E(YZ) - EY E_Z}{D_Z D_Y} = \frac{E(YZ) - EY E_Z}{E(XY) - EX E_Y} p_{XY} = \frac{E(XY - 0.4Y) - EY E(X - 0.4)}{E(XY) - EX E_Y}$$

$$= \frac{E(XY) - 0.4EY - EY EX + 0.4EY}{E(XY) - EX E_Y} p_{XY} = 0.9$$

[另解] $\Delta \text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, X - 0.4) = \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, -0.4) = \text{Cov}(X, Y)$

例7] n 个考生的录取通知书装入 n 个信封, 然后任意写上姓名寄出, 以 S_n 表示 n 个学生中收到的正确录取通知书人数, 求 DS_n .

[分析] 配对问题 引入 Bern 计数变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 人收到通知书} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

$$\therefore S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$DS_n = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

其中 $X_i \sim (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (无先后次序), 但不独立, $P(X_i = 1 | X_j = 1) = 1/n$

$$DX_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i EX_j = E(X_i X_j) - (\frac{1}{n})^2$$

其中 $E(X_i X_j) = 1 \times P(X_i = 1, X_j = 1) = 1 \times \frac{1}{n(n-1)}$

$$\therefore DS_n = n \times (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) + 2 \times C_n^2 \times \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right] \quad X_i X_j \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}$$

例8] 设 $EX = EY = 2$, $DX = 1$, $DY = 4$, $p_{XY} = 0.5$, 则根据切比雪夫不等式, 知 $P(|X - Y| \geq 6) \leq \underline{\hspace{2cm}}$.

[分析] $P(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX + DY - 2p_{XY} \sqrt{DX} \sqrt{DY}}{\varepsilon^2}$, 切比雪夫, $\forall \varepsilon > 0$

$$E(X - Y) = EX - EY = 0 \quad \Delta D(X - Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$D(X - Y) = DX + DY - 2p_{XY} \times \sqrt{DX} \sqrt{DY} = 4.3$$

$$\therefore P(|X - Y| \geq 6) \leq 3/6 = 1/2$$

例9] 10 年参观人数超过 7000w. 设游客有三条路径, 沿一条路 3 小时, 第二条路走 5h 回到原处, 沿第三条路 7h 回到原处, 游客等可能选择一条, 求平均

要用多少时间到中国馆, 求 EX 。

分析 $EX = P(Y=1)E(X|Y=1) + P(Y=2)E(X|Y=2) + P(Y=3)E(X|Y=3)$
 $= \frac{1}{3} [3 + (EX+5) + (EX+7)] = \frac{25}{3} - 13 = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}EX$

$\Rightarrow EX = 13$.

第五讲

综述 1. 收敛 2. 三个定理, 两大定理

一. 依概率收敛

→ 随机变量

设 $\{X_n\}$ 为 r.v. 序列, X 为 r.v. (或 a 为常数)

若 $\forall \varepsilon > 0$, 恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X 或 a , 记 $X_n \xrightarrow{P} X$ 或 $X_n \xrightarrow{P} a$

[例] 设 $\{X_n\}$, $X_n \sim f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$, 证明 $X_n \xrightarrow{P} 0$

$$\begin{aligned} \text{[分析]} \quad P\{-\varepsilon < X_n < \varepsilon\} &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan nx \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan n\varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P\{-\varepsilon < X_n < \varepsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \arctan n\varepsilon = 1 \quad *$$

二. 大数定律

1. 切比雪夫大数定律

$DX_k \leq A$, A 与 k 无关

设 $\{X_n\}$, $(n=1, 2, 3, \dots)$ 是相互独立的随机变量序列 若 DX_n 存在且有一致上限

$$\text{则 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = a$$

2. 伯努利大数定律

设 u_n 为 n 重伯努利实验中事件 A 发生的次数, 在每次实验中发生的概率 p .

$$\text{则 } \frac{u_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

3. 辛钦大数定律

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 若 $EX_n = \mu$ 存在, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$.

[注] 在满足一定条件的条件下, 所有大数定律 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$

[例] 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立, 且均服从指数分布 n .

则下列不符合指数分布的是

- A. $X_1, \frac{1}{2}X_1, \dots, \frac{1}{n}X_n$ B. $X_1, X_2, \dots, X_n$ C. $X_1, 2X_2, \dots, nX_n$ D. $X_1, 4X_2, \dots, n^2X_n$

[分析] 指数分布 $DX_n = \frac{1}{n^2}$ $\therefore D, n^2 \times \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty)$, 无界

[例] 设 r.v. 序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 根据辛钦大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

依概率收敛于 EX , 只要 $\{X_n\} (n \geq 1)$ ()

- A. EX 相同 B. 服从同一离散分布 C. 服从同一连续分布 D. 服从同一泊松分布

独立同分布

分析 ①独立 ②同分布 ③EX存在, 故D

例1 设总体X服从参数2的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自简单随机样本, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于

分析 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2)$, 此题可化

$$\therefore \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2) = E X_i^2 \stackrel{\Delta}{=} D X_i + (E X_i)^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

三. 中心极限定理

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n D X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

不论 $X_i \stackrel{iid}{\sim} F(\mu, \sigma^2)$, $\mu = E X_i$, $\sigma^2 = D X_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow (\sum_{i=1}^n X_i - n\mu) / \sqrt{n}\sigma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$$

$\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$
~ 标准

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

例1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布 r.v. 序列, 且均从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 且 $\Phi(x)$ 为标准正态分布, 则

$$A. \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda \sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad B. \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n}\lambda} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

$$C. \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad D. \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n}\lambda} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

分析 中心极限定理 $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2})$

$$\Rightarrow P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq x \right\} = P\left\{ \lambda \sum_{i=1}^n X_i - n / \sqrt{n} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

第六讲: 数理统计

综述: 1. 总体与样本 2. 统计量 3. 统计量的数字特征 4. 点估计与评价标准
5. 统计量分布 6. 区间估计与假设检验

一. 总体与样本

1. 总体 $X \sim F(x)$ (全体市民的月收入), 即为 r.v.

2. 样本 - 简单随机样本 $X_i \stackrel{iid}{\sim} F(x) \Leftrightarrow$ 独立同分布

二. 统计量

抽取 $X_1, X_2, \dots, X_n \Rightarrow g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 叫统计量 (不含参数)

(1) 均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (1阶原点矩)

(2) 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$ (类似2阶中心矩)

样本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

(3) 样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \ (k=1, 2, 3, \dots) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 0)^k$

(4) 样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \ (k=1, 2, 3, \dots)$

(5) 顺序统计量 将样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的 n 个观测量从小到大排列, 得

$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, 随机变量 $X_{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, k$) 称作第 k 顺序统计量.
其中 $X_{(1)}$ 为最小观测量, 而 $X_{(n)}$ 为最大观测量.

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

三. 统计量的数字特征 $\rightarrow$ 即 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数字特征

(例1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布的随机变量, 且均服从正态分布 $N(0, 1)$

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $Y_i = X_i - \bar{X}$, $i=1, 2, \dots, n$, 求

(1) Y_i 的方差 (2) Y_i 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_i, Y_n)$

(3) $P\{Y_1 + Y_n \leq 0\}$.

分析: (1) $DY_i = D(X_i - \bar{X}) = DX_i + D\bar{X} - 2Cov(X_i, \bar{X})$

其中 $DX_i = 1$, $D\bar{X} = D\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2} \cdot (1+1+\dots+1) = \frac{1}{n}$

$Cov(X_i, \bar{X}) = Cov(X_i, \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_i + \dots + X_n))$

$= Cov(X_i, \frac{1}{n}X_1) + Cov(X_i, \frac{1}{n}X_2) + \dots + Cov(X_i, \frac{1}{n}X_i) + \dots + Cov(X_i, \frac{1}{n}X_n)$

$= Cov(X_i, \frac{1}{n}X_i) = \frac{1}{n} \therefore DY_i = 1 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{Cov}(Y_1, Y_n) &= \text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) = \text{Cov}(X_1, X_n - \bar{X}) + \text{Cov}(-\bar{X}, X_n - \bar{X}) \\
 &= \text{Cov}(X_1, X_n) + \text{Cov}(X_1, -\bar{X}) + \text{Cov}(-\bar{X}, -\bar{X}) + \text{Cov}(-\bar{X}, X_n) \\
 &= 0 + \text{Cov}(X_1, -\frac{1}{n}X_1) + \frac{DX}{n} + \text{Cov}(-\frac{1}{n}X_n, X_n) \\
 &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \quad \rightarrow X \sim (\mu, \sigma^2) \Rightarrow DX = \frac{\sigma^2}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ } Y_1 + Y_n &= X_1 - \bar{X} + X_n - \bar{X} = X_1 + X_n - 2\bar{X} \quad \text{线性组合} \\
 &= (1 - \frac{2}{n})(X_1 + X_n) - 2(X_2 + \dots + X_{n-1}) = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N \\
 \text{而 } E(Y_1 + Y_n) &= 0 \therefore P\{Y_1 + Y_n \leq 0\} = 0.5 \quad \#
 \end{aligned}$$

△四. 点估计和评价标准

1. 矩估计

(1) 对于一个参数, 用 $\bar{X} \stackrel{\text{令}}{=} EX(\mu)$

例: 设 $X \sim f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 θ 的矩估计量 $\rightarrow$ 大写 X 值 $\rightarrow$ 小写 x

$$\bar{X} = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, \theta) dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} x^{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\text{令 } \bar{X} = \frac{\theta+1}{\theta+2} \Rightarrow \theta = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}} \quad \text{既定}$$

(2) 对于二个参数, 用 ① $\bar{X} = EX$ ② $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \stackrel{\text{令}}{=} E(X^2)$

例: 设总体 $X \sim f(x, \theta, \lambda) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, x \geq \theta$, 由样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 求 λ, θ 的矩估计量

例: 抽样 $\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

$$\begin{aligned}
 EX &= \int_{\theta}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} dx \quad \text{令 } x-\theta=t \quad \int_0^{+\infty} \frac{t+\theta}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\theta}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt \\
 &= \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\lambda}} d(\frac{t}{\lambda}) + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} d(\frac{t}{\lambda}) \\
 &= \theta \Gamma(1) + \lambda \Gamma(2) = \theta + \lambda \stackrel{\text{令}}{=} \bar{X}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} dx \quad \text{令 } x-\theta=t \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2+2\theta t+\theta^2}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} d\frac{t}{\lambda} + 2\theta \lambda \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} d\frac{t}{\lambda} + \theta^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\lambda}} d\frac{t}{\lambda} \\
 &= \lambda^2 \Gamma(3) + 2\theta \lambda \Gamma(2) + \theta^2 \Gamma(1) = 2\lambda^2 + 2\theta\lambda + \theta^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \bar{x} = \theta + \lambda \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = (\theta + \lambda)^2 + \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2} \\ \hat{\theta} = \bar{x} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2} \quad * \end{cases}$$

2. 最大似然估计 ← 外生

"参数 = ? 时, 观测值出现的 P 最大"

(1) 写成 $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta) / \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ 独立

(2) 令 $\frac{dL}{d\theta} = 0$ 或 $\frac{d \ln L}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}$

【例1】设 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta \end{pmatrix}$, 其中 θ 为未知参数, 从总体 X 抽 8 的一组样本, 为 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值 (离散)

【分析】 $L(\theta) = (1-2\theta)^4 \times \theta^2 \times \theta^2 \times [2\theta(1-\theta)]^2$

$$\therefore \ln L(\theta) = 4 \ln(1-2\theta) + \ln 4\theta^6 + 2 \ln(1-\theta)$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{4 \times 2}{1-2\theta} + \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = 0$$

$$\Rightarrow 12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0, \theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$$

$$\text{故 } \hat{\theta}_2 = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}$$

$$\bar{x} = (3 \times 4 + 2 + 2) / 8 = 2$$

$$EX = 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2 + 3 - 6\theta = 3 - 4\theta \stackrel{\text{令}}{=} 2 \Rightarrow \hat{\theta}_M = \frac{1}{4} *$$

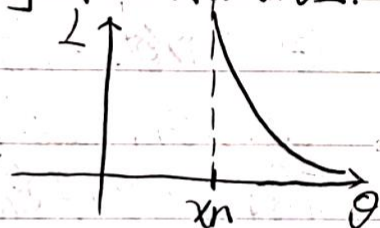
【例2】设总体 X 在区间 $[0, \theta]$ 上服从均匀分布, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是取自总体 X 的随机简单抽样, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 求 θ 的 $\hat{\theta}_M, \hat{\theta}_L$.

【分析】 $X \sim f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta \Rightarrow EX = \frac{\theta}{2}$

$$\text{令 } \frac{\theta}{2} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta}_M = 2\bar{x}$$

$$L(\theta) = \theta^{-n}, 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta \Rightarrow \theta \text{ 的函数}$$

$$\text{如得 } L(\theta)_{\max} \Rightarrow \hat{\theta}_L = x_{(n)}$$



3. 估计量的评价

(1) 无偏性: 给定 $\hat{\theta}$, 若 $E\hat{\theta} = \theta$, 称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

(2) 有效性: 若 $E\hat{\theta}_1 = E\hat{\theta}_2 = \theta$, 当 $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$, 称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

(3) 一致性 (相合性): (只针对大样本 $n \rightarrow \infty$)

若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 当 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$ or

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$ 即 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, 称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致(相合)估计.

例1 (2) 求 a, b , 使 $\theta_1 = a\bar{X}$, $\theta_2 = bX(n)$, 均为无偏估计, 并比较有效性.

(3) 应用切比雪夫不等式, 试证 θ_1, θ_2 均为 θ 的一致估计.

分析 (2) $E\hat{\theta}_1 = \theta$, $Ea\bar{X} = \theta = aE\bar{X} = aEX_i = a \frac{\theta}{2} \Rightarrow a = 2$

$$E\hat{\theta}_2 = \theta, bEX(n) = b \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = b \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\theta^n} dx$$

$$= \frac{b}{2} \theta^{2-n} =$$

$$\Delta f_n(x) = [F(x)]^n = \frac{x^n}{\theta^n} \Rightarrow f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\therefore E\hat{\theta}_2 = bEX(n) = b \int_0^\theta \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot x dx = b \frac{n}{n+1} \theta$$

$$\text{令 } b \frac{n}{n+1} \theta = \theta, \text{ 得 } b = \frac{n+1}{n}, \text{ 故 } \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X(n)$$

$$D\hat{\theta}_1 = 4D\bar{X} = \frac{4}{n} D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$D\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 DX(n)$$

$$\text{其中 } DX(n) = EX_n^2 - (EX_n)^2 = EX_n^2 - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2$$

$$\text{而 } EX_n^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\therefore D\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\frac{n}{n+2} \theta^2 - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2\right] = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2$$

$\therefore n \geq 2 \therefore n+2 > 3$ 即 $D\hat{\theta}_2 < D\hat{\theta}_1$, $\therefore \hat{\theta}_2$ 较有效

(3) 切比雪夫不等式 $P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, $\forall \varepsilon > 0$

$$\textcircled{1} \because D\hat{\theta}_1 = \frac{\theta^2}{3n} \therefore P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}, n \rightarrow \infty, (=0)$$

$$\textcircled{2} \because D\hat{\theta}_2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \therefore P\{|\hat{\theta}_2 - E\hat{\theta}_2| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}, n \rightarrow \infty, (=0)$$

$\therefore \theta_1, \theta_2$ 均为 θ 的一致估计. *

例1 (2018) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x/\theta|}$, $-\infty < x < +\infty$, 其 $\theta > 0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 $\hat{\theta}$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}$.

(I) 求 $\hat{\theta}$ (II) 求 $E\hat{\theta}$ 与 $D\hat{\theta}$

III 是否 $\exists a$, 使对 $\forall \varepsilon > 0$, 均有 $P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$?

$$\text{分析 I (I)} \quad L(\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{|x_1|}{\theta} - \frac{|x_2|}{\theta} - \dots - \frac{|x_n|}{\theta}} = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|}$$

$$\ln L(\theta) = -n \ln 2\theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

$$\text{令 } d \ln L(\theta) / d\theta = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |X_i| = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}$$

$$\text{故 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

$$(II) E \hat{\theta} = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n |X_i| = E|X| = E|X| = \theta$$

$$E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{2\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta$$

$$D \hat{\theta} = \frac{1}{n^2} D \sum_{i=1}^n |X_i| = \frac{1}{n} D|X| = \frac{1}{n} [E X^2 - (E|X|)^2]$$

$$\text{其中 } E X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \theta^2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} d\frac{x}{\theta} = \theta^2 \Gamma(3) = 2\theta^2$$

$$\therefore D \hat{\theta} = \frac{1}{n} [2\theta^2 - \theta^2] = \theta^2/n$$

$$(III) \text{由切比雪夫不等式, } P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D \hat{\theta}}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时 } P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

$$\text{故 } \theta = \theta. \text{ (一致估计)}$$