

396 必背公式——高数篇

常用求导公式

$$C' = 0 \quad (C \text{ 为常数})$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ 为常数})$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

常用积分公式

以下公式中， α 与 a 均为常数，除括号内声明外， $a > 0$

$$\int k dx = kx + C \quad (k \text{ 为常数})$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045\dots$$

三角换元法

①含 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 令 $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$ ($a > 0$)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C ;$$

②含 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 令 $x = a \tan t$, $dx = a \sec^2 t dt$ ($a > 0$)

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C ;$$

③含 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 令 $x = a \sec t$, $dx = a \sec t \tan t dt$ ($a > 0$)

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

④三角函数的有理式积分 (万能代换)

$$\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

华里士公式 (点火公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{2}{3} \times 1, & \text{当 } n \text{ 为大于1的正奇数} \end{cases}$$

常用无穷小替换

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(x+1) \sim x$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

三角函数公式

➤ 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

➤ 和差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha \pm \beta)}$$

➤ 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} = \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1-\cos \alpha}$$

➤ 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

高阶导数公式——莱布尼兹公式

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + u v^{(n)} \end{aligned}$$

常见初等函数的 n 阶导数公式

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$\text{若 } \alpha \text{ 为某一正整数 } n, \text{ 则 } \left((1+x)^n\right)^{(n)} = n!, \quad \left((1+x)^n\right)^{(n+j)} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots)$$

中值定理与导数应用

拉格朗日中值定理： $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

柯西中值定理： $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当 $F(x) = x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

多元函数微分法及应用

全微分： $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

全微分的近似计算： $\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$$z = f[u(t), v(t)] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z = f[u(x, y), v(x, y)] \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

当 $u = u(x, y)$ ， $v = v(x, y)$ 时，

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

隐函数的求导公式：

$$\text{隐函数 } F(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{隐函数 } F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

多元函数的极值及其求法：

设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 令 : $f_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}(x_0, y_0) = C$

$$\text{则: } \begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时, } \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时, 无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

一阶线性微分方程的两个公式

齐次方程 : $y' + P(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$

非齐次方程 : $y' + P(x)y = Q(x) \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$

旋转体体积

①曲线 $y = f(x)$ 与 $x = a$, $x = b$, x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积 :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx, a < b$$

②曲线 $y = y_2(x)$, $y = y_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($y_2(x) \geq y_1(x) \geq 0$) 围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积 :

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx, a < b$$

③曲线 $y = y_2(x)$, $y = y_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($b > a \geq 0$, $y_2(x) \geq y_1(x)$) 围成的图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积 :

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x)) dx$$

□级数部分会计算即可。

396 必背公式——线代篇

数字型行列式

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ a_n & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & a_1 \\ * & * & a_2 & 0 \\ * & \ddots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

(2) 设 A 是 m 阶方阵, B 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

$$(3) \text{范德蒙行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

抽象型行列式

设 A, B 为 n 阶方阵, 则

$$(1) |A^T| = |A|$$

$$(2) |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$(3) |AB| = |BA| = |A||B|, |A^k| = |A|^k$$

$$(4) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(5) |A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

克拉默法则

如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
 的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, 则

方程组 (1) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是把系数行列式 D 中第 j 列用常数项代替后所得的 n 阶行列式.

矩阵的转置

$$(1) (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(2) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(3) (\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$$

$$(4) (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

伴随矩阵

$$(1) \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$$

$$(2) (k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^* (n \geq 2)$$

$$(3) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$$

$$(4) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1} (n \geq 2)$$

$$(5) (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}$$

$$(6) (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$$

$$(7) (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A} (n \geq 3)$$

可逆与不可逆

n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}^*, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^T$ 均可逆 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 等价
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 只有 0 解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的列(行)向量组线性无关

n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 不可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 有非 0 解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的列(行)向量组线性相关

可逆矩阵

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵, 则

$$(1) (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(2) \text{若 } k \neq 0, \text{ 则 } (k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(3) \mathbf{AB} \text{ 可逆, 则 } (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(4) \mathbf{A}^T \text{ 可逆, } (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(5) |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$$

矩阵秩的性质

- (1) $0 \leq r(\mathbf{A}_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$.
- (2) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) = r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) (k \neq 0)$
- (3) $\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
- (4) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
- (5) $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$
- (6) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}), r(\mathbf{BA}) = r(\mathbf{B})$
- (7) 若 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times s} = \mathbf{O}$, 则 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$
- (8) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵 ($n > 2$), 则 $r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\mathbf{A}) = n \\ 1, & r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$

矩阵的等价

- (1) 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\mathbf{B}$, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价, 记 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$
- (2) 若存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$, 就称矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 等价。

线性表示

- (1) 向量组 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
- $\Leftrightarrow$ 存在数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$
 - $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(A, \beta)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$
- (2) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
- $\Leftrightarrow \beta_j$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, $j = 1, 2, \dots, t$
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$
- (3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价
- $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能互相线性表示
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$
 - $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且 $r(A) = r(B)$

线性相关性

(1) 线性相关

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

- $\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$
- $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 有非零解
- $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可由其余向量线性表示
- $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m$
- $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| = 0$

(2) 线性无关

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关

- $\Leftrightarrow$ 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 则必有 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$
- $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 只有零解
- $\Leftrightarrow$ 任一向量都不能由其余向量线性表示
- $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$
- $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| \neq 0$

线性相关常用结论

(1) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，但向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 必可有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出，且表出方式唯一。

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 部分组线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 整体线性相关；若整体向量组线性无关，则部分向量组也线性无关。(简记：**部分相关，整体相关；整体无关，部分无关**)

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，则其延伸组线性无关；若延伸组线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关。(简记：**低维无关，高维无关；高维相关，低维相关**)

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出，且 $m > t$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关。

线性方程组解的个数

(1) 齐次方程组 $AX=0$

只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$

有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$

(2) 非齐次方程组 $AX=b$

无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(A, b)$

有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n$

有无穷解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n$

线性方程组解的性质

- (1) 若 ξ_1, ξ_2 是 $AX=0$ 的解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解
- (2) 若 η_1, η_2 是 $AX=b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应 $AX=0$ 的解
- (3) 若 ξ 是 $AX=0$ 的解, η 是 $AX=b$ 的解, 则 $\eta + \xi$ 是 $AX=b$ 的解

线性方程组解的结构

(1) 若 $r(A)=r$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则 $AX=0$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意常数})$$

(2) 若 η^* 是 $AX=b$ 的一个特解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则 $AX=b$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^* \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意常数})$$

396 必背公式——概率论篇

事件的运算律

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- (3) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (5) 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$
- (6) 双重否定律: $\overline{\overline{A}} = A$
- (7) 差积转换律: $A - B = A \cap \overline{B}$

概率的五大运算公式

- (1) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

若 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

- (2) 减法公式: $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(AB)$

若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(B) \leq P(A)$

- (3) 乘法公式

若 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

三个事件的乘法公式: $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

(4) 全概率公式

设有事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，如果满足 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥，且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组。

设 E 为随机试验， Ω 是其样本空间， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组， B 是试验 E 的任一个随机事件，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ，则有

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

(5) 贝叶斯公式

设 E 为随机试验， Ω 是其样本空间， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组， B 是试验 E 的任一个随机事件，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ， $P(B) > 0$ ，

$$\text{则有 } P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

事件的独立性

A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

A, B, C 两两独立 $\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C). \end{cases}$

A, B, C 相互独立 $\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$

二次概率公式

在 n 重伯努利试验中, 设每次试验中事件 A 发生的概率 $P(A) = p (0 < p < 1)$ 。

则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为:

$$B_k(n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

五个常见的离散型分布

(1) 0-1分布 $X \sim B(1, p)$

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad (k = 0, 1)$$

$$EX = p, \quad DX = p(1-p)$$

(2) 二项分布 $X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$EX = np, \quad DX = np(1-p)$$

(3) 泊松分布 $X \sim P(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda > 0) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda$$

(4) 几何分布 $X \sim G(p)$

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p \quad (0 < p < 1) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$EX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}$$

(5) 超几何分布 $X \sim H(N, M, n)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad (k = 0, 1, \dots, \min\{n, m\})$$

三个常见的连续型分布

(1) 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(2) 指数分布 $X \sim E(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) 正态分布

①一般正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

$$EX = \mu, \quad DX = \sigma^2$$

②标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

性质: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(0) = \frac{1}{2}$; $P\{|X| \leq a\} = 2\Phi(a) - 1$

二维离散型随机变量

(1) 联合概率分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\textcircled{1} p_{ij} \geq 0 \quad \textcircled{2} \text{规范性: } \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

(2) 边缘分布律

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i\bullet} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$P(Y = y_j) = P(X < +\infty, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{\bullet j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) 条件分布

对于给定的 j , 若 $P(Y = y_j) > 0$;

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \quad (i = 1, 2, \dots) \text{ 为在条件 } Y = y_j \text{ 下随}$$

机变量 X 的条件概率分布;

对于给定的 i , 若 $P(X = x_i) > 0$;

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \quad (j = 1, 2, \dots) \text{ 为在条件 } X = x_i \text{ 下随}$$

机变量 Y 的条件概率分布;

期望的常见性质

$$(1) E(C) = C, E(EX) = EX;$$

$$(2) E(CX) = CE(X);$$

$$(3) E(k_1X \pm k_2Y) = k_1EX \pm k_2EY;$$

$$(4) \text{若 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, 则有 } E(XY) = EXEY.$$

方差的常见性质

$$(1) D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0;$$

$$(2) D(CX) = C^2DX;$$

$$(3) D(C_1X + C_2) = C_1^2D(X);$$

$$(4) \text{若 } X, Y \text{ 相互独立, 则 } D(X \pm Y) = DX + DY.$$

两个常用方差计算公式

$$(1) DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$(2) EX^2 = DX + (EX)^2$$

常见随机变量的期望和方差

分布名称	记法	期望	方差
0-1分布	$X \sim B(1, p)$	p	$1 - p$
二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	$np(1 - p)$
泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$X \sim G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$
均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
指数分布	$X \sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2