
概率论

第一章 随机事件和概率

模块一 随机事件

预习

什么是随机事件？

随机事件有哪些关系？

随机事件有哪些运算及运算律？

一. 随机事件的基本概念

1. 随机试验

可重复进行的结果不唯一且试验之前不能确定试验结果的试验称之为随机试验.

2. 样本空间

一个随机试验 E 所有可能的结果所组成的集合称之为 E 的样本空间, 记作 Ω .

3. 样本点

样本空间里的元素称之为样本点.

4. 随机事件

样本空间的任一子集称之为随机事件, 在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现, 我们称该随机事件发生.

注: 特殊的随机事件有:

必然事件: 由样本空间所有样本点组成的随机事件.

不可能事件: 不含任何样本点的事件.

基本事件: 由单个样本点组成的单点集.

二. 随机事件的运算

1. 和事件

事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称之为事件 A 和 B 的和事件. 易知: 当且仅当事件 A 和 B 中至少有一个发生时, $A \cup B$ 发生. $A \cup B$ 又记为 $A + B$.

类似地, 我们还可以定义 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件 $\bigcup_{k=1}^n A_k$, 以及可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的

和事件 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

2. 积事件

事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称之为事件 A 和 B 的积事件. 易知: 当且仅当事件 A 和 B 同时发生时, $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 简记为 AB .

类似地, 我们也可以定义 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件 $\bigcap_{k=1}^n A_k$, 以及可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的

积事件 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

3. 差事件

事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称之为事件 A 与 B 的差事件. 易知: 当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生时, $A - B$ 发生. 且 $A - B = A\bar{B} = A - AB$.

三. 随机事件的运算律

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A, AB = BA$$

2. 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$$

3. 分配律

$$(A + B)C = AC + BC, (AB) + C = (A + C)(B + C)$$

4. 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\overline{A}} = A$$

5.吸收律

$$A \subset B \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

四．随机事件的关系

1.包含

事件 A 所包含的样本点都属于事件 B ，则称事件 A 包含于事件 B （或称事件 B 包含事件 A ），这等价于事件 A 发生必然导致事件 B 发生，记为 $A \subset B$ 。

2.相等

$A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，记为 $A = B$ 。

3.互斥（或互不相容）

$A \cap B = \emptyset$ ，易知，事件 A 与事件 B 互斥当且仅当它们不能同时发生。

4.对立

如果 $A \cap B = \emptyset$ ，且 $A \cup B = \Omega$ ，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，记作 $B = \overline{A}$ 。易知，

在每次随机试验中，事件 A 与其逆事件 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生。

5.完备事件组

$A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$ ，且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是整个样本空间 Ω 的一个完备事件组。

【例 1.1】 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件。

- (1) A 发生， B, C 不发生
- (2) A, B, C 至少有一个发生
- (3) A, B, C 不多于一个发生
- (4) A, B 不同时发生
- (5) A, B, C 至少两个发生

(6) A, B, C 恰好两个发生

(7) A, B, C 不同时发生

【答案】 (1) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$

(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup ABC$ 或 $A \cup B \cup C$

(3) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC$

(4) $\overline{AB}$

(5) $AB \cup AC \cup BC$

(6) $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup \overline{A}B\overline{C}$

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$

【例 1.2】 A, B 为任意两事件，试化简事件 $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

【答案】 Φ

【例 1.3】 电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 ，电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”，而

$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于 ().

(A) $T_1 \geq t_0$

(B) $T_2 \geq t_0$

(C) $T_3 \geq t_0$

(D) $T_4 \geq t_0$

【答案】(C)

模块二 概率的基本概念

预习

概率有哪些性质？

什么是条件概率？

如何理解随机事件独立？

一. 概率的公理化定义

概率是所有事件构成的集合到实数集的一个映射 P ，它必须满足下列条件：

(1) 规范性： $P(\Omega)=1$.

(2) 非负性：对任意事件 A ，都有 $P(A) \geq 0$.

(3) 可列可加性：设 $A_k, k=1,2,\dots$ 为互不相容事件，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

二. 概率的性质

1. $P(\Phi)=0$.

2. 有限可加性：设 $A_k, k=1,2,\dots,n$ 为互不相容事件，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

3. 逆事件的概率： $P(\bar{A})=1-P(A)$.

4. 减法公式： $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

5. 加法公式： $P(A \cup B)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

6. 若事件 $A \subset B$ ，则 $P(A) \leq P(B)$.

【例 1.4】 已知 $P(A)=0.8, P(A-B)=0.1$ ，则 $P(\overline{AB})=$ _____.

【答案】 0.3

三. 条件概率

1. 定义

设 A, B 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$ ，则称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在随机事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

2. 性质

(1) 当 $P(A) > 0$ 时， $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$;

(2) 当 $P(A) > 0$ ， $P(AB) = P(B|A)P(A)$ ，该公式也可以推广到多个事件积事件的情况. 一般，设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件， $n \geq 2$ ，且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ ，则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

【例 1.5】 某动物出生后能活到 20 岁的概率是 0.8，能活到 25 岁的概率是 0.4，求现龄 20 岁的该动物还能活 5 年的概率？

【答案】 0.5

【例 1.6】 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【例 1.7】 一批电视共 100 台，次品率为 10%，接连两次从其中任取一个（不放回），

(1) 已知第一次取到次品，求第二次取到正品的概率；

(2) 求第二次才取得正品的概率.

【答案】 (1) $\frac{10}{11}$; (2) $\frac{1}{11}$

【例 1.8】 $P(A) = 0.4, P(B|A) = 0.5, P(A|B) = 0.25$, 则 $P(B) =$ _____.

【答案】 0.8

四. 随机事件的独立性

1. 定义

(1) A, B 独立

设 A, B 是两个事件, 如果满足等式 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

(2) A, B, C 两两独立

设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式
$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \end{aligned} \right\}$$
 则称事件 A, B, C 两两独立.

(3) A, B, C 相互独立

设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式
$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C), \end{aligned} \right\}$$
 则称事件 A, B, C 相互独立.

2. 性质

(1) 设 A, B 是两随机事件, 且 $P(A) > 0$. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$.

(2) 若随机事件 A, B 相互独立, 则 $A, \bar{B}; \bar{A}, B$ 也相互独立.

【例 1.9】 若事件 A, B 相互独立, 证明 $\bar{A}, \bar{B}$ 也相互独立.

【例 1.10】 若事件 A 与 A 独立, $P(A) > 0$, 求 $P(A)$.

【答案】 1

【例 1.11】 两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【例 1.12】 A 和 B 为两个相互独立的随机事件, 且 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5$, 求 $P(\bar{A}B)$ 及 $P(\bar{A}|B)$.

【答案】 0.3; 0.6

【例 1.13】 一枚硬币独立地掷两次, 引进事件: $A_1 = \{\text{掷第一次出现正面}\}$,
 $A_2 = \{\text{掷第二次出现正面}\}$, $A_3 = \{\text{正反面各出现一次}\}$, $A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$,
则事件 ().

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立.

(B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立.

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

【答案】 (C)

作业

1. 设 $P(A) = 0.4$, $P(A+B) = 0.7$, 若 A, B 互不相容, 则 $P(B) =$ _____; 若 A, B 相互独立, 则 $P(B) =$ _____.

2. 设 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$, 则 $P(B - A) =$ _____.

模块三 概率的计算

预习

什么是古典概型和几何概型？

如何用简单概型算概率？

什么是五大公式？

一. 简单概型

1. 古典概型

如果试验 E 的样本空间 Ω 只有有限个样本点，并且由各个样本点所构成的基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验为古典概型或等可能概型. 对于该试验的事件 A ，则有

$$P(A) = \frac{A \text{ 中的基本事件个数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

【例 1.14】 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$ ，其中 B 、 C 分别是将一枚骰子连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

【答案】 $p = \frac{19}{36}$ ； $q = \frac{1}{18}$

【例 1.15】 从数字 $1, 2, \dots, 10$ 中任取 4 个数，求至少取到一个偶数的概率.

【答案】 $\frac{41}{42}$

【例 1.16】 10 位乘客来到某 20 层大楼的一层乘电梯上楼，每个乘客在任何一层（从 2 到 20 层）离开是等可能的，求至少有两个人在同一层下的概率是多少？

【答案】 $1 - \frac{A_{19}^{10}}{19^{10}}$

【例 1.17】 设袋中有 5 个球，3 个白球，2 个黑球，

(1) 先后有放回取 2 球；

(2) 先后无放回取 2 球；

(3) 任取 2 球.

求至少取到一个白球的概率？

【答案】 (1) $\frac{21}{25}$; (2) $\frac{9}{10}$; (3) $\frac{9}{10}$

【例 1.18】 袋中有 a 只白球， b 只黑球， k 个人依次在袋中任取一只球，(1) 放回；(2) 不放回，求第 i ($i=1, 2, \dots, k$) 个人取到白球的概率 ($k \leq a+b$) .

【答案】 (1) $\frac{a}{a+b}$; (2) $\frac{a}{a+b}$

2. 几何概型

如果试验 E 的样本空间 Ω 为几何空间中的一个有界区域（这个区域可以是一维、二维甚至是 n 维的），且由各个样本点所构成的基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验为几何概型. 对于该试验的事件 A ， $P(A) = \frac{A \text{ 的度量（长度、面积或体积）}}{\Omega \text{ 的度量（长度、面积或体积）}}$.

【例 1.19】 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为

_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【例 1.20】在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数 x, y ，求 $xy < \frac{1}{2}$ 的概率.

【答案】 $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

【例 1.21】甲、乙两艘轮船同时驶向一个港口，轮船在一天 24 小时内任意时刻到达的概率都是一样的，港口只能停泊一艘轮船，甲船停泊 1 小时，乙船停泊 2 小时，试计算两船都不需要等待的概率.

【答案】 $\frac{1013}{1152}$

二. 五大公式

1. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

2. 减法公式

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

3. 乘法公式

$$P(A) > 0, P(B) > 0 \text{ 时, } P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

【例 1.22】设盒子中有 10 张彩票，其中有两个大奖，甲、乙两个人先后随机地从中摸去一张，不放回. 求：

- (1) 两人同时摸到大奖的概率；
- (2) 只有甲摸到大奖的概率；
- (3) 只有乙摸到大奖的概率；

-
- (4) 两人只有一人摸到大奖的概率；
(5) 甲摸到大奖的条件下，乙未摸到大奖的概率；
(6) 乙摸到大奖的条件下，甲未摸到大奖的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{45}$; (2) $\frac{8}{45}$; (3) $\frac{8}{45}$; (4) $\frac{16}{45}$; (5) $\frac{8}{9}$; (6) $\frac{8}{9}$

【例 1.23】 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{AB})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 - p$

【例 1.24】 A, B, C 两两独立, $ABC = \emptyset, P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}, P(A) = P(B) = P(C)$, 则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【例 1.25】 甲、乙两零件，单独使用时其有效率分别为 0.92, 0.93. 当甲失效时，乙有效的概率是 0.85.

求：(1) 甲、乙两零件至少有一个有效的概率；(2) 乙失效时，甲有效的概率.

【答案】 (1) 0.988; (2) $\frac{29}{35}$

4. 全概率公式

设 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 为样本空间的一个完备事件组，则 $P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$

5. 贝叶斯公式

设 $A_k, k=1, 2, \dots, n$ 为样本空间的一个完备事件组, 则 $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$.

【例 1.26】 第一只盒子里装有 5 只红球, 4 只白球; 第二只盒子里装有 4 只红球, 5 只白球. 先从第一只盒子里取一只球放到第二只盒子, 再从第二只盒子里取出一只球, 求取到的是白球的概率.

【答案】 $\frac{49}{90}$

【例 1.27】 某学生连续参加两科的考试, 已知第一科及格的概率为 0.7, 在第一科及格的情况下, 第二科也及格的概率为 0.6, 如果第一科不及格, 第二科及格的概率为 0.4, 求

(1) 第二科及格的概率;

(2) 在第二科及格的条件下, 第一科也及格的概率.

【答案】 (1) 0.54; (2) $\frac{7}{9}$

【例 1.28】 甲、乙、丙三人同时各自独立地对同一目标进行射击, 三人击中目标的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 设一人击中目标时, 目标被击毁的概率为 0.2, 两人击中目标时, 目标被击毁的概率为 0.6, 三人击中目标时, 目标必定被击毁.

求: (1) 目标被击毁的概率; (2) 已知目标被击毁, 则只由一人击毁的概率.

【答案】 (1) 0.458; (2) $\frac{36}{229}$

作业

1. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.25$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$, 求 A, B, C 全不发生的概率.

2. 三个箱子, 第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球, 第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取出一个箱子, 再从这个箱子中取出 1 个球, 这个球是白球的概率为_____. 已知取出的球是白球, 此球属于第二个箱子的概率为_____.

第二章 随机变量及其分布

模块四 基本概念

预习

什么是随机变量？

如何描述随机变量？

分布函数和概率密度函数有什么性质？

一. 随机变量的定义

设随机试验的样本空间为 $\Omega = \{e\}$. $X = X(e)$ 是定义在样本空间 Ω 上的单值函数. 称 $X = X(e)$ 为随机变量.

注：对应于任一随机事件 $A \subset \Omega$ ，我们都可以定义一个随机变量， $X(e) = \begin{cases} 1, e \in A \\ 0, e \notin A \end{cases}$ ，这是最简单的随机变量.

二. 离散型变量及其分布律

1. 离散型随机变量的定义

如果某一随机变量所有可能的取值为有限个或可列无限个，我们就称该随机变量为离散型随机变量.

2. 分布律

X	x_1	x_2		x_n	
p_k	p_1	p_2		p_n	

其中随机变量 X 所有可能的取值为 $x_k (k=1, 2, \dots)$ ， $P\{X = x_k\} = p_k (k=1, 2, \dots)$.

注：只有离散型随机变量才有分布律.

【例 2.1】一汽车沿一街道行驶,需要通过三个均设有红绿灯的路口,每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立,且红绿两种信号显示的时间相等,以 X 表示该汽车首次停下来时,它已通过的路口的个数, 求 X 的概率分布.

【答案】

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

【例 2.2】将两只骰子同时掷一次,用 X 表示两个点数中的较小者,用 Y 表示两个点数的和。求 X 和 Y 的分布律.

【答案】

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

【例 2.3】某人向同一目标独立重复射击 n 次, 每次射击命中概率为 $p(0 < p < 1)$, 记随机变量 X 为命中目标的次数, 求 X 的分布律.

【答案】 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\dots,n$

【例 2.4】某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中概率为 $p(0 < p < 1)$ ，直至射中目标为止，记随机变量 X 为射击的次数，求 X 的分布律.

【答案】 $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p, k=1,2,\dots$

【例 2.5】有 n 把钥匙，只有一把是正确的，现逐一检查（不放回），直到检出正确的钥匙为止，求试验次数 X 的分布律.

【答案】 $P\{X=k\} = \frac{1}{n}, k=1,2,\dots,n$

【例 2.6】设某一口袋里装有 3 只白球和 3 只黑球，甲乙两人轮流从盒子里取球，甲先取，取到黑球时就停止，求甲取球次数的分布律.

【答案】 (1) 不放回

X	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 放回

$P\{X=n\} = \frac{3}{4^n}, n=1,2,\dots$

【小结】计算离散型随机变量的分布列首先需要分析随机变量取值的所有可能结果，然后再计算每种结果出现的概率. 在计算概率的时候，往往会用到古典概型的计算方法和概率的基本公式，如乘法公式等.

三. 随机变量的分布函数

1.定义

设 X 为一随机变量, 令 $F(x) = P\{X \leq x\}, x \in R$, 称此函数为随机变量 X 的分布函数.

练习: 离散型随机变量 X 的分布律:

X	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

利用定义可以写出其分布函数 $F(x)$.

2.充要条件

- (1) $F(x)$ 单调不减;
- (2) $0 \leq F(x) \leq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- (3) $F(x)$ 右连续.

练习: 判断以下函数哪些可以作为某个随机变量的分布函数.

(1) $F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$; (2) $F(x) = \sin x$;

(3) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ (4) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\pi}{6}, \\ \sin x, & \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

【例 2.7】 设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都为随机变量的分布函数, 则下列各个函数中, 哪个可以作为随机变量的分布函数 ().

- (A) $F(x) + G(x)$ (B) $2F(x) - G(x)$
- (C) $0.3F(x) + 0.7G(x)$ (D) $1 - F(-x)$

【答案】(C)

3.性质

设 X 的分布函数为 $F(x)$ ，对任意的实数 $a, b (a < b)$ ，有

$$(1) P\{X \leq b\} = F(b), P\{X < b\} = F(b-0).$$

$$(2) P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a).$$

$$(3) P\{a \leq X < b\} = F(b-0) - F(a-0).$$

$$(4) P\{X = b\} = F(b) - F(b-0).$$

【例 2.8】设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$ 则 $P\{X = 1\} = (\quad)$.

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$ (D) $1 - e^{-1}$

【答案】(C)

四. 连续型变量及其概率密度

1.定义

如果对于随机变量的分布函数 $F(x)$ ，存在非负函数 $f(x)$ ，使对于任意实数 x 有

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ，则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

2.概率密度的充要条件

$$(1) f(x) \geq 0;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

【例 2.9】已知 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 均为随机变量的概率密度, 则下列哪些函数也可以作为随机变量的概率密度?

(A) $f_1(x) + f_2(x)$

(B) $f_1(x)f_2(x)$

(C) $2f_1(x) - f_2(x)$

(D) $0.4f_1(x) + 0.6f_2(x)$

【答案】(D)

【小结】判断函数是否可以作为随机变量的概率密度的方法, 主要依据概率密度的两条性质:

(1) $f(x) \geq 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 逐一检验即可.

3. 其他性质

设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 概率密度为 $f(x)$, 则

(1) $F(x)$ 是连续函数.

(2) 对任意的实数 c , $P\{X=c\}=0$.

(3) 对于任意实数 $x_1, x_2, (x_1 \leq x_2)$,

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} \\ &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \end{aligned}$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$.

注: 1) 只有连续型随机变量才有概率密度;

2) 要注意 $F'(x) = f(x)$ 只有当 $f(x)$ 连续时才成立, $f(x)$ 不连续时, $F(x)$ 一般是不可导的. 但对连续型随机变量来说, 其分布函数 $F(x)$ 一定是连续的. 考生需要弄清楚这些概念。

【例 2.10】设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 则

$$P\left\{\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2}\right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{3}{4}$

【例 2.11】设随机变量 X 具有概率密度 $f(x) = ce^{-|x|}$,

求 (1) 常数 c ; (2) X 的分布函数 $F(x)$.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$; (2) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$

【例 2.12】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求 X 的分布函数 $F(x)$.

【答案】 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

【例 2.13】设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ A + B \arcsin \frac{x}{a}, & -a \leq x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases} \quad (a > 0)$$

求: (1) A 和 B ; (2) 概率密度 $f(x)$.

【答案】 (1) $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$; (2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a < x < a, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

【小结】 (1) 确定概率密度中未知参数的方法是利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; 确定分布函数中的未知参数的方法是一般利用分布函数在分段点处是右连续的, 但当已知是连续型随机变量时, 还可以利用分布函数在分段点处左连续这条性质.

(2) 已知概率密度求分布函数, 利用定义 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. 此时, 需要注意的是, 当被积函数 $f(x)$ 是分段函数时, $F(x)$ 要分段计算, 一般来说也是分段函数. 已知分布函数求概率密度时, 用 $F'(x) = f(x)$. 但当连续型随机变量的分布函数在有限个甚至可列个点不可导时, 在不可导点处, 可直接令 $f(x) = 0$.

作业

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$ 则 $P\{X^2 = 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \theta(1-\theta)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$, 其中 $0 < \theta < 1$, 若 $P\{X \leq 2\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{X = 3\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = Ae^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, 则系数 $A = \underline{\hspace{2cm}}, P\{0 < X < 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

模块五 常见分布

预习

常见离散型随机变量有哪些？它们的分布律是什么？

常见连续型随机变量有哪些？它们的概率密度是什么？

正态分布有什么特殊性质？

一. 常见的离散型随机变量

1.0-1 分布

随机变量 X 所有可能的取值只有 0 或者 1，且取 1 的概率为 p ($0 < p < 1$)，取 0 的概率为 $1 - p$ ，则称该随机变量服从 0-1 分布.

0-1 分布的分布律为：

X	1	0
P	p	$1 - p$

0-1 分布是最简单的随机变量，后面很多离散型的随机变量都是以它为基础的.

2.二项分布

若随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)，其中

$p + q = 1, p, q \in (0, 1)$ ，则称随机变量 X 服从参数为 (n, p) 的二项分布，并记 $X \sim B(n, p)$.

注：（1）如果试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$ ，则称这种试验为伯努利试验. 将一个伯努利试验独立重复地进行 n 次，则称 n 重伯努利试验.

设在每次试验中， $P(A) = p$ ($0 < p < 1$)，则在 n 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次的概率：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

（2）若 $X \sim B(n, p)$ ，那么 X 描述的是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，其中

$$P(A) = p.$$

3.几何分布

若随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = n\} = q^{n-1}p, n = 1, 2, \dots$, 其中参数

$0 < p < 1, p + q = 1$, 则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布, 并记 $X \sim G(p)$.

注: 若 $X \sim G(p)$, 那么 X 描述的是伯努利试验中某事件 A 首次发生时进行的试验次数, 且 $P(A) = p$.

4.泊松分布

若随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \dots)$, 其中参数 $\lambda > 0$, 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 并记 $X \sim P(\lambda)$.

注: 设 $X \sim P(\lambda)$, 则 X 常用来描述单位时间内出现在某服务台的顾客数, 或单位时间内接到的电话次数, 或单位时间内指定区域中出现某种射线、粒子等的个数.

【例 2.14】 大楼的楼道里有 5 盏路灯, 每盏灯为亮或灭与其他灯为亮或灭相互独立, 在任意时刻, 每盏路灯亮着的概率为 0.5. 试计算, 在同一时刻:

- (1) 有两盏灯亮着的概率;
- (2) 至少有三盏灯亮着的概率;
- (3) 至多有两盏灯亮着的概率.

【答案】 (1) $\frac{5}{16}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{2}$

【例 2.15】 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此

人第4次射击恰好是第2次命中目标的概率为 ()

(A) $3p(1-p)^2$

(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$

(D) $6p^2(1-p)^2$

【答案】(C)

【例 2.16】假设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂，现该厂新生产了 n 台仪器（假设生产过程相互独立），求恰好有 k 台能出厂的概率.

【答案】 $C_n^k (0.94)^k (0.06)^{n-k}$

【例 2.17】随机变量 $X \sim P(\lambda), Y \sim P(2\lambda), P\{X < 1\} = \frac{1}{5}$, 求 $P\{Y \geq 1\}$.

【答案】 $\frac{24}{25}$

【例 2.18】随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = C \frac{\lambda^k}{k!}, k = 1, 2, 3, \dots$ 求 C .

【答案】 $\frac{1}{e^\lambda - 1}$

二. 常见的连续型随机变量

1. 均匀分布

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 则称 X 服从区间 (a, b) 内的均

匀分布, 并记为 $X \sim U(a, b)$. 其分布函数:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

2. 指数分布

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ 其中参数 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为

λ 的指数分布, 并记 $X \sim E(\lambda)$.

注: (1) $X \sim E(\lambda)$, 则分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(2) $X \sim E(\lambda)$, 则

$$P\{X > X_1 + X_2 | X > X_1\} = \frac{P\{X > X_1 + X_2\}}{P\{X > X_1\}} = \frac{e^{-\lambda(x_1+x_2)}}{e^{-\lambda x_1}} = e^{-\lambda x_2} = P\{X > X_2\}, \text{ 说明指}$$

数分布具有“无记忆性”..

3. 正态分布

若随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in R$), 其中参数

$\mu \in R, \sigma > 0$, 则称 X 服从正态分布, 并记 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 特别地, 将 $N(0, 1)$ 称为标准

正态分布, 其概率密度和分布函数分别记作 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

注: (1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. 该公式揭示了求解正态分布问题的一个重要思路: 标准化.

(2) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 具有对称性, 也即其概率密度是关于直线 $x = \mu$ 对称的. 特别地,

标准正态分布的概率密度是偶函数; 该性质也可以概括成等式: $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$.

(3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则它的分布函数 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

【例 2.19】 设随机变量 $X \sim U(0, 6)$, 试计算方程 $t^2 + Xt + 2 = 0$ 有实根的概率.

【答案】 $1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$

【例 2.20】 设随机变量 X 在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布. 现在对 X 进行三次独立观测, 试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

【答案】 $\frac{20}{27}$

【小结】 均匀分布中的概率等于长度比.

【例 2.21】 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则 $P\left(X > \frac{1}{\lambda}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 e^{-1}

【例 2.22】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 若 $P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$, 则 $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【例 2.23】 设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 若 $P\{0 < X < 2\} = 0.3$, 求 $P\{X > 4\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】0.2

【例 2.24】设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ ()

- (A) 随 μ 的增加而增大 (B) 随 σ 的增加而增加
(C) 与 μ 无关，与 σ 有关 (D) 与 μ, σ 都无关

【答案】(D)

【例 2.25】设随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ ，则必有 ()。

- (A) $\sigma_1 < \sigma_2$ (B) $\sigma_1 > \sigma_2$ (C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$

【答案】(A)

【例 2.26】设随机变量 $X \sim N(10, 0.02^2)$ ，已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$ ，则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为_____。

【答案】0.9876

【小结】(1) 均匀分布中的概率等于长度比。

(2) 指数分布的概率密度公式需要考生熟记，另外 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ 是这一章的经常出题的点。

(3) 正态分布在所有分布中起着核心的作用，处理与正态分布相关的题目，主要有两种思

路. 一、标准化: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$; 二、对称性: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度关于 $x = \mu$ 对称.

作业

1. 设随机变量 X 服从 $B(2, p)$, Y 服从 $B(3, p)$, 若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geq 1\} =$ _____.

2. 设在时间 t (分钟) 内, 通过某路口的汽车数服从参数为 λt 的泊松分布. 已知 1 分钟内没有汽车通过的概率为 0.2, 求在 2 分钟内至少有 1 辆汽车通过的概率.

3. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度. 若

$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} (a > 0, b > 0)$ 为某随机变量的概率密度, 则 a, b 满足 ()

(A) $2a + 3b = 4$

(B) $3a + 2b = 4$

(C) $a + b = 1$

(D) $a + b = 2$

模块六 随机变量函数的分布

预习

什么是随机变量的函数？

用什么方法求随机变量函数的分布？

一维随机变量函数的分布

1.离散型

若 Y 是离散型随机变量， $Y = g(X)$ ，则只需写出随机变量 Y 的所有可能取值，然后再一一计算取对应值的概率即可.

【例 2.27】 假设随机变量 X 服从区间 $[0.4, 2.3]$ 上的均匀分布，令 $Y = [X]$ （其中 $[X]$ 表示 X 的整数部分，也即不超过 X 的最大的正数，如 $[1.5] = 1, [2] = 2$ ），试求 Y 的分布.

【答案】

Y	0	1	2
P	$\frac{6}{19}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{3}{19}$

【例 3.25】 已知 X 的分布律如表所示

X	1	2	3	...	k	...
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^k$	...

求 $Y = \sin \frac{\pi}{2} X$ 的分布律.

【答案】

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

2.连续型

若已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$ ，随机变量 $Y = g(X)$ ，求 Y 的概率密度. 这类型的

问题，我们常采用的是分布函数法， $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f(x)dx$,

进一步对 $F_Y(y)$ 求导，便可得 Y 的概率密度.

【例 2.28】设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 内的均匀分布，随机变量 $Y = X^2$ ，求 Y 的概率密度.

【答案】 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

【例 2.29】设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 内的均匀分布，随机变量 $Y = e^X$ ，求 Y 的概率密度.

【答案】 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 \leq y \leq e, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

【例 2.30】设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 内的均匀分布，随机变量 $Y = -\ln X$ ，求 Y 的概率密度.

【答案】 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

【例 2.31】已知随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 随机变量 $Y = X^3$, 求 Y

的概率密度.

【答案】 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

【例 2.32】若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证明: $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

【小结】

已知随机变量 X 的概率密度 $f(x)$, 随机变量 $Y = g(X)$, 利用分布函数法计算 Y 概率密度的一般思路是: 首先根据 x 的取值范围, 确定 $Y = g(X)$ 的取值范围, 从而确定 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ 等于 0 或 1 的取值范围, 对于其他范围内的 y , 则可以解不等式 $g(X) \leq y$, 转化为求 X 落在某范围内的概率.

作业

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令 $Y = X^2 + 1$, 求

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$; (2) $P\left\{-1 < Y < \frac{3}{2}\right\}$.

第三章 数字特征

模块七 期望

预习

什么是数学期望？

如何求随机变量函数的数学期望？

一. 随机变量 X 的数学期望

1. 离散型

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$. 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

【例 3.1】设 $X \sim B(1, p)$, 求 EX .

【答案】 $EX = p$

【例 3.2】设 $X \sim P(\lambda)$, 求 EX .

【答案】 $EX = \lambda$

2. 连续型

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛, 则称积分

$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

【例 3.3】设 $X \sim U(a, b)$ ，求 EX 。

【答案】 $EX = \frac{a+b}{2}$

【例 3.4】设 $X \sim E(\lambda)$ ，求 EX 。

【答案】 $EX = \frac{1}{\lambda}$

二. 随机变量函数的数学期望

1. 离散型

设 X 是离散型随机变量，它的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$ ， Y 是随机变量 X 的

函数： $Y = g(X)$ （ g 是连续函数）。若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

【例 3.5】设随机变量 X 的分布律为：

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

试计算 $E(X), E(X^2), E(3X^2 + 5)$ 。

【答案】 -0.2； 2.8； 13.4

2. 连续型

设 X 是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$ 。 Y 是随机变量 X 的函数： $Y = g(X)$ （ g

是连续函数). 若 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则有 $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

【例 3.6】设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求 $E(X^2)$.

【答案】 $\frac{7}{6}$

【例 3.7】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$ 试求 $E(X^2)$.

【分析】题中给出的是 X 的分布函数, 故得通过分布函数求得概率密度, 然后再利用函数期望的公式计算.

【答案】 $\frac{15}{2}$

【例 3.8】设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $E(X), E\left(\frac{1}{X}\right)$.

【答案】 $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}a}{2}, E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$

【例 3.9】 游客乘电梯从底层到电视塔观光，电梯每个整点的第 5 分钟、第 25 分钟和 55 分钟从底层起行，假设一游客在早晨八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 $[0,60]$ 上服从均匀分布，求该游客等候时间 Y 的数学期望.

【分析】 先写出等候时间 Y 关于 X 的表达式，再利用随机变量函数的数学期望计算公式.

【答案】 $\frac{35}{3}$

三. 运算性质

1. $E(c)=c$;
2. $E(cX)=cE(X)$;
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

四. 常见分布的数学期望

1. 0-1 分布: $E(X)=p$
2. 二项分布: 若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X)=np$.
3. 几何分布: 若 $X \sim G(p)$, 则 $E(X)=\frac{1}{p}$.
4. 泊松分布: 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$.
5. 均匀分布: 若 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X)=\frac{a+b}{2}$.
6. 指数分布: 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.
7. 正态分布: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X)=\mu$.

作业

1. 已知甲.乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

- (1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；
- (2) 从乙箱中任取一件产品，产品为次品的概率.

模块八 方差

预习

什么是方差?

计算方差的常用公式是什么?

方差有什么运算性质?

一. 定义

设 X 是一个随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$, 即 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$.

注: (1) 由定义, 随机变量 X 的方差表达了 X 的取值与其数学期望的偏离程度. 若 X 取值比较集中, 则 $D(X)$ 较小, 反之, 若取值比较分散, 则 $D(X)$ 较大. 因此, $D(X)$ 是刻画 X 取值分散程度的一个尺度.

(2) 方差实际上是随机变量 X 的函数 $g(X) = [X - E(X)]^2$ 的期望, 故根据上边所讲期望的知识, 对于离散型随机变量和连续型随机变量有不同的期望公式.

(3) 方差的定义式用得比较少, 较常用的是由定义得出的另一计算方差的公式

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. 事实上,

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

(4) $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$

【例 3.10】 设 $X \sim B(1, p)$, 求 DX .

【答案】 $DX = p(1 - p)$

【例 3.11】设 $X \sim P(\lambda)$ ，求 DX 。

【答案】 $DX = \lambda$

【例 3.12】设 $X \sim U(a, b)$ ，求 DX 。

【答案】 $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

【例 3.13】设 $X \sim E(\lambda)$ ，求 DX 。

【答案】 $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

二. 常见分布的方差

1. 0-1 分布: $D(X) = pq$ 。

2. 二项分布: 若 $X \sim B(n, p)$ ，则 $D(X) = npq$ 。

3. 几何分布: 若 $X \sim G(p)$ ，则 $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

4. 泊松分布: 若 $X \sim P(\lambda)$ ，则 $D(X) = \lambda$ 。

5. 均匀分布: 若 $X \sim U(a, b)$ ，则 $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 。

6. 指数分布: 若 $X \sim E(\lambda)$ ，则 $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ 。

7. 正态分布: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $D(X) = \sigma^2$ 。

三. 运算性质

1. $D(c) = 0$ ；

2. $D(cX) = c^2 D(X)$ 。

【例 3.14】设随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $DX, D(e^X)$.

【答案】 $\frac{1}{18}; \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}$

【例 3.15】 假设随机变量 X 在区间 $[-1, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$ 求方差 $D(Y)$.

【分析】 Y 是离散型随机变量, 先写出 Y 的分布律, 再计算其方差.

【答案】 $\frac{8}{9}$

【例 3.16】 设随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

【分析】 独立重复观察 4 次, 即进行 4 次伯努利试验, 若把观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 视为试验成功的话, 那么 $Y \sim B(4, p)$, 其中 p 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的概率. 求得 Y 的分布, 再计算 Y^2 的数学期望就显而易见了.

【答案】 5

【注】当随机变量 X 的期望、方差已知时，计算 X^2 的期望，一般可以采用公式

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2.$$

作业

1. 已知随机变量 X 服从二项分布, 且 $E(X) = 2.4, D(X) = 1.44$, 则二项分布的参数 n, p 的值为()

(A) $n = 4, p = 0.6$

(B) $n = 6, p = 0.4$

(C) $n = 8, p = 0.3$

(D) $n = 24, p = 0.1$

2. 设 X 是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

则方差 $D(X) =$ _____.