

注意: ① 无穷大量与无界量的区别.

$f(x)$ 无穷大量 要求在某一极限过程中, 所有点上的函数值都趋近于无穷.

$f(x)$ 无界. 只要求函数在某一极限过程中至少有部分点的函数值趋近于无穷.

因此, 无穷大量一定无界, 但, 无界量不一定为无穷大量.

②. $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 为上凹 (凸) 的. $\cap$ $f''(x) > 0$. 下凹 (凹) $\cup$

$\times$ 周建武的书. $f''(x) > 0 \cup \Rightarrow$ 上凹. $f''(x) < 0 \cap$. 下凹.

③ 拉格朗日中值定理:

如果函数 $f(x)$ 满足①在闭区间 $[a, b]$ 上连续; ②在开区间 (a, b) 内可导.

那么在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ($a < \xi < b$) 使得等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立.

④ 求和公式.

等差数列 $\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$.

等比数列 $\Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_1 - a_{n+1}q}{1-q} (q \neq 1)$.

⑤ 需求弹性 $Ed = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$. ($Ed < 0$).

⑥ 看清题目要求: 极大值点 $x = \dots$, 极大值 $y|_{x=\dots} = \dots$

⑦ $y = x \Rightarrow e^{\ln x} = y$ 如果 x 本来就定义域 > 0 , 才可以这么变!

⑧ $x \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. $x \in \mathbb{R}$.

⑨ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. $1 - \sec^2 x = -\tan^2 x$.

⑩ 求 Δ 区间, 小心开闭, 别漏!

高数Part:

<第一章> 函数、极限、连续性

一、函数.

1. 映射 (X, Y 是两个非空集合, 若对集合 X 中的每一个元素 x , 均可找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应, 则称该对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射) 记为 $f: X \rightarrow Y$, y : 像, x : 原像.

单射 ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$). 满射 ($Pf = Y$) 双射

2. 函数的基本性质

① 奇偶性 (定义域关于原点对称. 奇: $f(x) = -f(-x)$. 偶: $f(x) = f(-x)$).

② 周期性. ($f(x+l) = f(x)$ 注: 并不是所有的函数都有最小正周期, 如常值函数).

③ 单调性

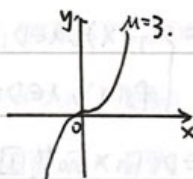
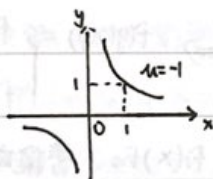
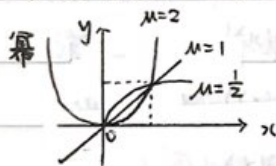
若 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称, 则 $f(a-x) = f(a+x)$.

④ 有界性. $|f(x)| \leq M, x \in I$.

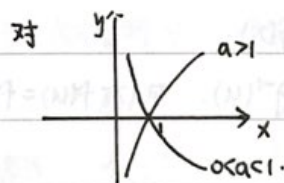
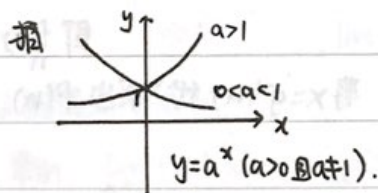
3. 复合函数、反函数.

(反函数存在定理(充分性): 单调函数 f 必存在反函数, 且其具有与 f 相同的单调性).

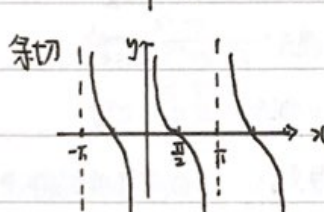
4. 初等函数 (基本初等函数: 幂 $y = x^u$. 指 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$). 对 $y = \log_a x$ (三角).



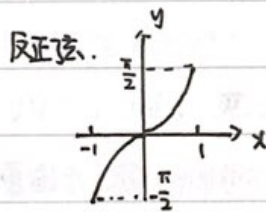
$u > 0, [0, +\infty) \uparrow$
 $u < 0, [0, +\infty) \downarrow$
 $y = x^u, u$ 为常数.



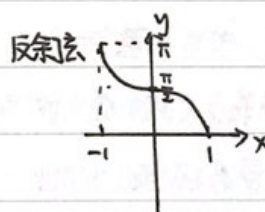
$y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).



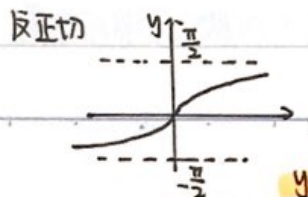
$y = \cot x$. (奇函数).



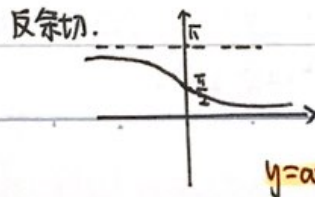
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x, \Delta$



$y = \arctan x$.



$y = \text{arccot } x, \Delta$

题型一：求定义域.

① 分母不为 0. ② $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$. ③ $\log_a b$. $b > 0$ 且 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

④ $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 有界性. $|x| \leq 1$.

(二)：求复合函数定义域.

① $f(x)$ 的定义域为 I . 则 $f(g(x))$ 的定义域为使得 $g(x) \in I$ 的 x 的范围.

$\downarrow$
 x 的范围 复合函数中 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 的值域.

$f(g(x))$ 的定义域仍为 x 的范围.

② $f(g(x))$ 的定义域为 I , 则 $f(x)$ 的定义域为 $g(I)$.

$\downarrow$
 x 的范围.

(三)：求反函数. (反函数的自然定义域就是原来函数的值域.)

步骤：① 求出 $y = f(x)$, $x \in D$ 的值域 I .

② 从 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$, $y \in I$.

③ 交换 x, y . 得 $y = f^{-1}(x)$, $x \in I$.

(四)：复合函数计算.

① 分段函数. 设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} f_1(g(x)), & g(x) \in D_1 \\ f_2(g(x)), & g(x) \in D_2 \end{cases}$
 (结合例 18).

根据 $g(x)$ 解出 $g(x) \in D_1$ 的 x 的范围, 再将 $f(x)$ 的 x 替换成 $g(x)$.

② 已知 $f(g(x))$ 与 $g(x)$. 求 $f(x)$.

即 $f(x)$

令 $u = g(x)$. 反解出 $x = g^{-1}(u)$. 则有 $f(u) = f(g(x))$. 将 $x = g^{-1}(u)$ 代入求出 $f(u)$.

△注意：① 思路要清晰，书写要整齐规范！

② 时时刻刻带着定义域. 定义域写规范 $x \in (,) \cup (,)$.

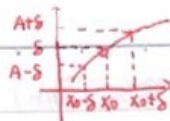
③ 看清题目，不要抄错题，少粗心，不要跳步骤，考虑要全面！

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

二、极限.

 $\delta \rightarrow x_0$ 附近. $f(x)$ 到 A 的距离无限小.1. 定义 (函数极限) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$, 使 $|x| > X$ 时, $|f(x)| > M$. x 很大 $\rightarrow$ 无穷. $x \rightarrow +\infty, -\infty$.(数列极限) 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $n > N$ 时, $|x_n - A| < \varepsilon$.极限存在: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在且相等.(极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是与函数在该点的函数值 $f(x_0)$ 无关的).2. 性质 ① 唯一性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 唯一.② 局部有界性 (某去心邻域): 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在正数 $\delta > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 上有界. $\Rightarrow$ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\exists M > 0, \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| < M$.③ 保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) > 0$. < 0 < 0 .④ 保不等号性: 若 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.

(数列极限) ① 唯一性: 收敛数列极限必唯一.

② 有界性: 收敛数列必有界.

注: 有界数列未必收敛, 所以数列有界是数列收敛的必要条件, 但不是充分条件. 如 $x_n = (-1)^n$.③ 保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$, 则必有正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $x_n > 0$.④ 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a . $\Rightarrow$ 若两个子数列收敛于不同极限, 则 $\{x_n\}$ 发散. 如 $x_n = (-1)^n$ ($n=1, 2, \dots$) 发散.

3. 极限运算法则

举例: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - x^2 + 1)$ 直接代入多项式. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 1}$ (判断分母不为 0, 直接代入). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{2x^4 + x^2 - 2}$ (无穷小因子出法, 同除 x^4). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2})$ (数列求和) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ (有界性)

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$ (同除 $x-3$). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ (有理化因子).

4. 极限存在准则. 夹逼准则 ($y_n \leq x_n \leq z_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$).重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ($\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, 利用图).单调有界收敛准则 (单调有界数列必有极限) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

5. 无穷小: $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$. (β 比 α 高阶的无穷小). $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$. (β 是比 α 低阶的无穷小).
- $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$. (β 与 α 同阶无穷小). $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$. (β 是关于 α 的 k 阶无穷小).
- $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. (β 与 α 等价无穷小, $\alpha \sim \beta$).

$$x \rightarrow 0, x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x). \quad e^x - 1 \sim x.$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; a^x - 1 \sim x \ln a, (a > 0).$$

△ 有限个无穷小之和/之积仍为无穷小. △ 无穷小与有界量的乘积仍为无穷小. $\sin x, \cos x, \arctan x$. "天壤之别".

三、连续.

1. 定义 ① 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$.

② 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 须满足: $f(x)$ 在 x_0 点有确定的函数值 $f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在, 且 } f(x_0^-) = f(x_0^+), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

△ $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2. 间断点

第一类 { 可去间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

跳跃间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

第二类 { 无穷间断点: 有 1 个或 2 个 ∞ .

振荡间断点: 均 $\neq \infty$

> 左右极限至少有一个不存在.

3. 性质: 一切初等函数都在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质.

① 有界性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. $\exists M > 0, \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$.

② 最值定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能取到最大值和最小值.

③ 介值定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值和最小值.

若 $m \leq c \leq M$, 则 $\exists \xi \in [a, b], f(\xi) = c$.

④ 零点存在定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$.

则 $\exists \xi \in (a, b), f(\xi) = 0$.

<极限计算>

一、公式和结论(须熟记).

1. 泰勒公式和等价无穷小

$$\begin{aligned} \text{最常用:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad [\text{第一组}] \\ \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad [\text{第二组}] \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

等价无穷小: 第一组: $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3, \quad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3, \quad x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3.$$

第二组: $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x.$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax.$$

2. 其他公式:

$$(1) \quad \begin{cases} a^x - 1 \sim x \ln a & (x \rightarrow 0) \\ \sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln a & (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (\text{导数})$$

$$\boxed{x^x - 1 \sim \frac{\ln x}{x}} \quad x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0. \quad (a > 0).$$

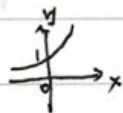
$$(3) \quad \ln u \sim u - 1. \quad (u \rightarrow 1).$$

$$u^v \stackrel{u \rightarrow \infty}{=} e^{\lim_{u \rightarrow \infty} v \ln u} = e^{\lim_{u \rightarrow \infty} v(u-1)}.$$

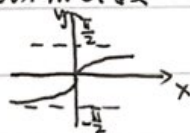
(4) 常见单侧极限. ① 含 a^x 或 $a^{\frac{1}{x}}$ 函数 (特别地, $a=e$).同时 $0 < a < 1$ 时.

$$\text{当 } a > 1: \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$

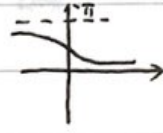
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{cases}$$

② 含 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 函数

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0 \end{cases}$$

③ 取整函数 $[x]$. (即不大于 x 的最大整数)

$$\begin{cases} \text{当 } x \rightarrow n^-, [x] = n-1 \\ \text{当 } x \rightarrow n^+, [x] = n. \end{cases} \quad n \text{ 为整数.}$$

无穷大的性质: $\infty \cdot \infty = \infty$ ✓, 但 $\infty - \infty, \infty + \infty, \frac{\infty}{\infty}$ 为未定式.

(5) 无穷大从低阶到高阶的排序.

低) $\log_a^n (a > 1), n, n^k (k > 1), a^n (a > 1), n! (n \rightarrow \infty), n^n$ (高).

即: 对数函数 $\rightarrow$ 幂函数 $\rightarrow$ 指数函数 $\rightarrow$ 阶乘 $\rightarrow$ 超越

3. 常识:

(1) 无穷小的性质: 有界 $\times$ 无穷小 = 无穷小. ^{有限个} 无穷小的和、差、积仍为无穷小. $\frac{0}{0}$ 未定式.

(2) 必须会的不等式: $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x. \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$$\ln(1+x) < x \quad (x > 0).$$

(3) 极限四则运算法则: 已知 $\lim f = A, \lim g = B.$

$$\textcircled{1} \lim (f \pm g) = A \pm B$$

$$\textcircled{2} \lim fg = AB$$

$$\textcircled{3} \lim f/g = A/B. \quad (B \neq 0).$$

(4) 极限传递性: 已知 $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a), \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a.$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]$$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na} = 1. \quad (a > 0).$

重要极限. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e.$$

(6) 洛必达法则:

成立的 3 个条件: 1° $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$

2° $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0.$

3° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 $\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

二、极限计算:

1. 有理函数的极限 $\lim \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.2. 无理函数的极限及推广 ① $\frac{0}{0}$ ($x \rightarrow x_0$ 时, 因式分解出 $(x-x_0)$, 约去 $(x-x_0)$, 即可求出).(当分子分母出现无理式). ② $\frac{\infty}{\infty}$ ($x \rightarrow \infty$ 时, 分子分母同除 $n \times x$ 的最高次幂).③ $\infty - \infty$ (通分 or 乘因子 or 倒代换).④ $0 \cdot \infty$ (化分式 $\rightarrow \frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$).

(0 型分母).

3. 用等价无穷小代换求极限.

4. 单侧极限问题

5. 含参变母极限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$.

及相关讨论极限函数连续性的问题.

6. 用洛必达法则求极限. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. 对分子无要求.

7. 用泰勒公式求极限.

8. 数列极限.

⑤ $\infty^0, 0^0$. (化为 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$).⑥ 1^∞ . $\lim_{x \rightarrow \square} [u(x)]^{v(x)}$ ($\lim_{x \rightarrow \square} u(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \square} v(x) = \infty$). $= \lim_{x \rightarrow \square} \exp \{ [u(x) - 1] v(x) \}.$

9. 含变限积分的极限. (用洛必达求导!)

变上限积分函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.导数 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$. ($\Phi'(x) = f(x)$).

1. 有理函数的极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m \text{ 时} \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ 时} \\ \infty, & n > m \text{ 时} \end{cases}$$

$$\Delta x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

2. 无理函数的极限.

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 型: (永远只做一件事, 分子分母同除以 x 的最高次幂!) Δ

例: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{\sqrt{4+0} - 0 + 1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

(2) $\frac{0}{0}$ 型: 思路是凑分子、分母的公因式, 并约去. 也可用等价无穷小和洛必达解决.

(3) $\infty - \infty$ 型: 通分, 乘因子, 倒代换 $\Rightarrow$ 转化为分式, 再求极限!

$\rightarrow$ 令 $x = \frac{1}{t}$
分子分母有理化. (乘以共轭因式: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 的共轭因式为 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$).

3. 用等价无穷小代换求极限.

关于什么时候可以用? $\Rightarrow$ 因式就是乘法 $A \cdot B$, $A \cdot \frac{1}{B}$ 就可以用.

只要出现 $+$, $-$ 不可以用!

且因式必须独立且完整. $A \cdot B$ 中 可以用 $(A \cdot B \cdot C)$ 不可以用!

4. 泰勒公式: 对于 $\ln(1+\varphi(x))$, $e^{\varphi(x)}$, $(1+\varphi(x))^a$. $\rightarrow$ 用泰勒会有很好的效果.

5. 单侧极限问题. a^x , $a^{\frac{1}{x}}$, $\arctan x$, $\arccot x$, e^∞ , 绝对值, 分段函数分界点.

6. 用洛必达法则求极限. 注意 ① 每次洛必达后, 都要化简, 分商指数, 再用下次洛必达!

② 洛必达法则失效: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq A$ 或 ∞ 也不是未定式.

无法断定 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在. 此时洛必达失效.

③ 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数式中有 $\sin x$ 或 $\cos x$. $x \rightarrow \infty$ 时, 函数中有 $\sin x$, $\cos x$.

④ 多次使用洛必达, 出现循环. 如 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

③ 极限中在求, 可考虑用变量代换 $t = \frac{1}{x^k}$.

△ 另外, 在涉及抽象函数及其导数的证明题中, 尝试用洛必达会有奇效!

7. 含参数变量极限. 形式 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$. 极限函数. (难 $\rightarrow$ 我晚一点如果碰到题目再来!)

8. 数列极限. 难 $\rightarrow$

放大和缩小函数的常用方法:

① 直接观察或简单推算

② “人多力量大”模型 $K \cdot U_{\min} \leq U_1 + \dots + U_k \leq K \cdot U_{\max}$.

③ 分母放大比值缩小, 分子缩小比值放大.

④ 若干正数相乘, 略去小于1, 因子放大, 略去大于1, 因子则缩小.

⑤ 利用已知不等式

9. 小众套路.

A) $\ln$ (一堆项相加) 的处理方法: 拆出 e 的因子. ✓

B) 超越函数的极限 $x^x, \sin x \Rightarrow e^{\lim x \ln \dots}$.

△ 极限能不能拆开算?

有2个原则: ① 拆开的两部分必须各自存在极限.

② 拆开后就不要再合上, 一拆到底.

1. 求渐近线

(1) 铅直渐近线  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. 则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的一条铅直渐近线.(2) 水平渐近线  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. (a 为常数). 则 $y = a$ 为 $f(x)$ 的一条水平渐近线.(3) 斜渐近线  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$. 则 $y = ax + b$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线.(注意: 水平和斜渐近线可能要分 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 两种情况). (若有水平渐近线, 一般无斜渐近线)

2. 判断间断点.

(1) 找出所有“可疑点”: 使函数无意义的点、分段点或分段点.

(2) -- 计算其左右极限, 判断类型

3. 极限存在的判定法则.

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$ (常数). 若分母 $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) \neq 0$. 则分子 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.(A $\neq 0$) 若分子 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) \neq 0$. 则分母 $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0$.

<错题·核心笔记> 第1章. 函数和极限连续性.

1. 求 $y = \sqrt{3-x} + \arctan x$ 的定义域.

$$1. 3-x \geq 0. \text{ 且 } x \neq 0. \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3]$$

2. 证 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

$$2. |f(x)| = \left| \frac{x^2+1}{x^2+1} \right| \leq \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^2+1} \leq 1+1=2.$$

3. 计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+100} + x)$.

$$3. \text{ 有理化 } = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1} = -50.$$

下方0负号, x 趋近于负无穷!

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$$

$$4. \frac{3}{2}. \quad \text{通分, } e^x - 1 \sim x, \text{ 洛必达求导.}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$$

$$5. e^{\frac{2}{3}}. \quad u^v \sim e^{v(u-1)}. \quad \text{通分, 等价无穷小, 洛必达.}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$6. e. \quad u^v \sim e^{v \ln u} \rightarrow \text{洛必达.}$$

7. 证 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x = \begin{cases} -x, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ x, & |x| < 1. \end{cases}$$

判别其类型.

不一定要考虑极限!

$$\therefore x = -1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1. \quad \text{跳跃}$$

$$x = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1. \quad \text{跳跃}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n$$

$$8. \sqrt[3]{abc}. \quad \text{拆分并每个配1.} \quad a^x - 1 \sim x \ln a.$$

9. 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^n}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点及类型.

$$9. f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < |x| < 1 \\ x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$$

洛必达 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1} = \frac{x^{2n+2} \cdot \ln x^2}{x^{2n} \cdot \ln x^2} = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad x=0 \text{ 为可去间断点.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad x=1 \text{ 为跳跃.}$$

$f(x)$ 为偶函数, $x=-1$ 也为跳跃.

10. 求 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 所有间断点及其类型.

10. 判断点为 $x=0, \pm 1$. 先化简.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2+1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{x^2+1} = -1. \quad x=0 \text{ 为跳跃.}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad x=1 \text{ 为可去.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty. \quad x=-1 \text{ 为无穷.}$$

$$= \frac{-1}{x+1} \cdot \sqrt{2} = \infty.$$

<标题: 高数辅导> 第一章. 函数极限连续.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \frac{1}{x})^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax^2) + \ln(1-ax^2)}{x^2(e^{-x^2}-1)} = 2. \text{ 求 } a.$$

$$3. \text{ 函数 } f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}} \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内连续.}$$

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. 则 a, b 应满足?

$$4. \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-bx}-1}{x}, & x < 0 \\ -1, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \ln(e^x - ax), & x > 0. \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 求 a, b .

$$5. \text{ 已知 } f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1-x^2. \text{ 则 } \varphi(x) \text{ 的定义域为}$$

$$6. \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内满足 } 2f(1+x) + f(1-x) = 3e^x.$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为

A. 单调函数 B. 周期函数 C. 有界函数 D. 奇函数.

7. 下列各式中正确的是

$$A. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\frac{1}{x})^x = 1. \quad B. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\frac{1}{x})^x = e.$$

$$C. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-\frac{1}{x})^x = -e \quad D. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\frac{1}{x})^{-x} = e.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - \ln(2+x)}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\ln(x^2+1)}.$$

$$10. \text{ 设 } f(x) \text{ 定义域为 } [0, 1], \text{ 函数 } g(x) = \sqrt{1-x} \cdot f(\sin \pi x)$$

$+ \sqrt{1+x} \cdot f(1+\cos \pi x)$ 的定义域为

11. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, 严格 $\nearrow$ 且恒正.

则下列哪个函数在定义域上严格 $\nearrow$?

$$A. f(\sqrt{x}). \quad B. -f(\sqrt{x}). \quad C. f(\frac{1}{x}). \quad D. \frac{1}{f(x)}.$$

$$1. \text{ 令 } \frac{1}{x} = t. \text{ 倒代换: 原} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(\ln t)}{t}} = e^0 = 1.$$

$$2. a = \pm \sqrt{2}. e^x \sim x, \ln(1+x) \sim x.$$

$$\ln a + \ln b = \ln ab. \text{ 更快!}$$

$$3. a \geq 0, b < 0. \because \text{连续} \therefore \text{分母不存在零点.}$$

$$e^{bx} > 0. \therefore a \geq 0. \text{ 即可确定分母 } > 0.$$

$$\text{又: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}} = 0. \text{ 若 } b > 0, a+e^{bx} \rightarrow a. \therefore b < 0.$$

$$4. a = 2, b = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-bx}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(-bx)}{x} = -\frac{1}{2}b. \therefore b = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - ax - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - a \right)$$

$$= 1 - a = -1 \therefore a = 2. \text{ 加底号不能把 } x=0 \text{ 代入!}$$

$$5. x \in (-1, 1). f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = 1-x^2 \Rightarrow \varphi(x) = \ln(1-x^2).$$

$$6. \text{ 用 } x \text{ 代 } -x. \text{ 得 } 2f(1-x) + f(1+x) = 3e^{-x}.$$

$$\text{两式联立得 } f(1+x) = 2e^x - e^{-x} \stackrel{1+x=t}{=} f(x) = 2e^{x-1} - e^{1-x}.$$

$$f'(x) = 2e^{x-1} - e^{1-x}(-1) > 0. \text{ 选 A.}$$

7. 选 A. 不要先看, 看容易看错!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}} = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}} = e^0 = 1.$$

$$8. \text{ 原} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2x}-1}{x} - \frac{\ln(2+x)}{x} \right] = \infty. \because \frac{\ln(2+x)}{x} \text{ 不能用} \frac{0}{0} \text{ 法则!}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\ln(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{3} x^2}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

更快!

$$10. \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 0 \leq \sin \pi x \leq 1 \\ 0 \leq 1+\cos \pi x \leq 1. \end{cases} \Rightarrow 0.5 \leq x \leq 1.$$

$$11. 1^\circ \text{ 用定义. } \forall x_1 < x_2 < 0. 0 < -x_2 < -x_1. \Rightarrow f(\sqrt{x_2}) < f(\sqrt{x_1})$$

$$\Rightarrow A(x_2) < A(x_1). \therefore A(x) \downarrow. \text{ 选 D.}$$

$$2^\circ \text{ 特殊办法. 取 } f(x) = x^2. \text{ 选 D.}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}} = \underline{\quad\quad\quad}.$$

$$12. \text{原} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2+1}{-1} = 1.$$

$x \rightarrow -\infty$. 根号外要变号!

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \underline{\quad\quad\quad}.$$

15. 讨论 $x \rightarrow 0^+, 0^-$. 当 x 作指数时, 定设 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = 0+1=1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} = 2-1=1.$$

16. n 为何值时, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2004}}{(x+1)^n - x^n}$ 存在且不为零.

16. 二项式展开定理.

$$\text{原} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2004}}{C_n x^{n-1} + C_n x^{n-2} + \dots} \quad n-1=2004 \Rightarrow n=2005.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \underline{\quad\quad\quad}.$$

$$17. 1^\circ \text{原} = \frac{\ln(1+e^x) - x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(e^x(e^x+1)) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln e^x + \ln(e^x+1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+e^{-x}) = 0.$$

$$2^\circ \text{令 } x = \frac{1}{t}. \text{原} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+e^{\frac{1}{t}}) - \frac{1}{t}}{e^t - 1} \quad \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{-t}+1)}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t}}{t} = 0. \quad x = \ln e^x.$$

$$18. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, (x > 0) \text{ 在定义域有}$$

$$18. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n(1+(\frac{x}{e})^n))}{n}$$

几个间断点?

$$(1) \text{当 } 0 < x \leq e, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln(1+(\frac{x}{e})^n)}{n} = 1.$$

$$(2) \text{当 } x > e, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^n(1+(\frac{e}{x})^n))}{n} = \ln x.$$

即 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$ 在 $x=e$ 处连续, 无间断点.

$$19. f(x) = \frac{x^2-2x+1}{(x^2-1)(1+e^{\frac{1}{x}})}, f(x) \text{ 的间断点个数.}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty. \text{ 无穷}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \text{ 跳跃}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0. \text{ 可去} \quad \text{共3个.}$$

$$20. \text{设方程 } x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0.$$

$$20. C. f(0) = a_0 < 0.$$

$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 为常数. 且 $a_0 < 0$. 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

A. 方程没有实根. B. 不能确定是否有实根.

$\therefore f(x_0) > 0$. 由零点定理可知.

C. 至少有一个正实根. D. 至少有一正实根和一个负实根.

至少存在一个 $x' \in (0, x_0)$. $f(x') = 0$.

<第二章> 导数与微分.

一、导数.

1. 定义: ① 增量式 (瞬时变化率) $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 广义化: $\Delta x \rightarrow$ 无穷.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

② 差值式 (令 $x_0 + \Delta x = x$).

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. 性质: 1° $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. $\rightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件.2° 函数可导 $\Rightarrow$ 函数必连续.3° 函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义: 可微必可导, 可导必可微.4° $f(x)$ 是可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数. $f(x)$ 是可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数.3. 基本求导公式: $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\sqrt{(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ (要验证而求!)}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\sqrt{(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\ln \cos x)' = -\tan x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sin^2 x)' = \sin 2x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\cos^2 x)' = -\sin 2x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

$$(\sin x \cos x)' = \cos 2x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

4. 求导法则. (1) 导数的四则运算. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(2) 复合函数求导法则(链式): 一层一层, 求导到最底! 不要跳步!

(3) 变限积分求导: $\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

(4) 反函数求导法则: 原函数 $y=f(x)$

反函数 $x=g(y) \Rightarrow$ 记为 $y=f^{-1}(x)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{反函数的导数, 等于直接函数导数的倒数!}$$

(5) 高阶导数: $(e^x)^{(n)} = e^x$

$$(x \ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \cdot \sin(kx + \frac{n\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$[\ln(x+1)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

莱布尼兹公式: $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$= C_n^0 \cdot u^{(n)} \cdot v^{(0)} + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v^{(1)} + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v^{(2)} + \cdots + C_n^n \cdot u \cdot v^{(n)}$$

老忘!

微分. (记号②③)

1. 定义: 函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 存在与 Δx 无关的常数 A . 使 $\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x)$

其中 $o(\Delta x)$ 是 $\Delta x \rightarrow 0$ 时比 Δx 更高阶的无穷小. 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微.

② 线性主部 = dy .

并称 $A \Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分, 记作 $dy|_{x=x_0} = A \Delta x$. 又 $\Delta x = dx$. 故 $dy|_{x=x_0} = A dx$.

2. 可导, 可微, 连续与极限.

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

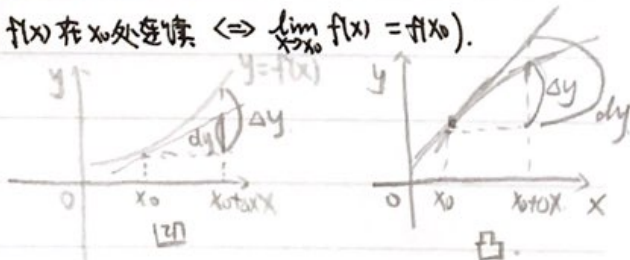
3. 微分 $dy = f'(x) dx$. 别忘 dx .

$$= f'(x) \Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

极限 $\longleftrightarrow$ 连续

可导
微分



$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \quad (o(\Delta x) \text{ 为高阶无穷小}).$$

Δy 与 dy 的差距是 Δx 的高阶无穷小.

三、导数的应用.

需求求切线 or 法线

1. 切线与法线. 切线: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 法线: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. 其中 $f'(x_0) \neq 0$.

函数在一点处的导数不存在时, 切线可能是存在的.

2. 单调性与极值: (1) 单调性. $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零. $f(x) \uparrow$. $f'(x) \leq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零. $f(x) \downarrow$.(2) 极值: $f(x) \leq f(x_0)$. x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

(极值点, 要么导数为 0 (驻点), 要么导数不存在).

第一充分条件: 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 在 $U(x_0, \delta)$ 内可导, 则.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时, } f'(x) < 0. \text{ 当 } x_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时, } f'(x) > 0 \Rightarrow \text{极小值 } \vee \\ \text{当 } x_0 \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时, } f'(x) > 0. \text{ 当 } x_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时, } f'(x) < 0 \Rightarrow \text{极大值 } \wedge \end{array} \right.$

若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号 $\Rightarrow$ 不是极值.

第二充分条件: $\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处二阶可导, } f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{极小值.} \\ \text{若 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处二阶可导, } f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{极大值.} \end{array} \right.$

(3) 凹凸性与拐点 (前提: 函数是连续的).

(1) 凹凸性: $\forall x_1, x_2 \in I$, 有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \Rightarrow f(x)$ 是凹曲线  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \Rightarrow f(x)$ 是凸曲线 

(2) 拐点. 连续曲线凹凸弧的分界点. (拐点要么是二阶导数为 0, 要么是二阶导数不存在).

判别拐点: 设 $f(x)$ 在 I 上二阶可导.1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } f''(x) > 0, \forall x \in I. \Rightarrow f(x) \text{ 是凹的.} \\ \text{若 } f''(x) < 0, \forall x \in I. \Rightarrow f(x) \text{ 是凸的.} \end{array} \right.$ 2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处的左右邻域内 $f''(x)$ 变号. $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 为拐点.

应用. 需求弹性 (Q/P).

需求弹性 $G_d = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$.

1. 判断函数在一点处是否可导.

(1) 先判断在 x_0 处是否连续! 若不连续则不可导.(2) 不需要讨论左右极限. 直接计算 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.(3) 需要讨论左、右极限. 只有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 均存在且相等, 则可导.2. 用定义计算导数或相关极限. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ (用于表达式给定的具体函数, 求导数值).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \Rightarrow \text{用于用定义判断是否可导.} \quad f'(1) = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

推广形式: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta(h)) - f(x_0)}{\Delta(h)} = f'(x_0)$. (前提: $f'(x_0)$ 存在). $\Delta(h)$ 是 $h \rightarrow 0$ 时无穷小量.

$$h > 0 \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3 \text{ 只保持一致!})$$

$$f'(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \leftarrow \text{注意 } f(0) \text{ 不一定为 } 0.$$

3. 隐函数求导.

 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $\Rightarrow$ 把 y 看成 $y(x)$. 对方程两边同时求导. 解出 y' .

4. 参数方程求导.

$$y = f(x) \text{ 由 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ 所确定.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}$$

$$\Delta \ln a = \ln a - \ln b.$$

5. 对数求导法: 对多项相乘、相除、开方、乘方得到的式子, 先取对数再求导.

$$\begin{aligned} \text{开方 } y &= f(x) \\ \text{开方 } y &= \sqrt{x-2} \\ \ln y &= \frac{1}{2} \ln(x-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(x-2) - 3 \ln(4-x) \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(x-2) - 3 \ln(4-x).$$

6. 计算 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值. (仅求极值点 or 端点).(1) 求出 $f'(x)$ (2) 求出 $f'(x) = 0$ 的点, 即驻点, 和 $f'(x)$ 不存在的点.(3) 计算上述点和端点 a, b 的函数值. 得 $\max, \min$.

7. 计算实际问题应用题.

不仅要看定义域. 求出 $f'(x) = 0$ 的点. 比较 $f(x)$ 的驻点.极值点 $\rightarrow x_0$ $\hookrightarrow$ 当 $x < x_0$, $f'(x) > 0$. 当 $x > x_0$, $f'(x) < 0$.极值 $\rightarrow f(x_0)$. $\therefore x = x_0$ 处函数取最大值. (马规则).

△奇变偶不变，符号看象限。

$$\sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$= -\sin x$$



看 $\sin$ 在 $+$ 。



看 $\cos$ 在 $+$ 。

No.

Date

[补充笔记] (包含变限积分求导、高阶导数)。

一、变限积分函数求导。

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\psi(x)] \psi'(x).$$

注意：① 整个公式本质上为关于 x 的导数，最后仅含 x 。

② 积分上下限仅含 x ③ 被积函数仅含 t ！

例1: $\frac{d}{dx} \int_0^x x \sin(x-t)^2 dt.$

$$I = \int_0^x -x \sin(x-t)^2 d(x-t) \Rightarrow \text{找到 } t, \text{ 并调整 } dt \Rightarrow \text{先调整，而后再！}$$

$$= -x \int_0^x \sin(x-t)^2 d(x-t) \Rightarrow \text{把 } x \text{ 移出去} \quad \int_0^x t \rightarrow \int_x^0 x-t$$

$$= -x \int_x^0 \sin^2 t dt = x \int_0^x \sin^2 t dt \Rightarrow \text{换元(换上下限)，使被积函数仅含 } t.$$

$$\therefore \frac{dI}{dx} = x \sin^2 x + \int_0^x \sin^2 t dt. *$$

例2: $f(x) \in C[0,1], F(x) = \int_0^1 |x-t| \cdot f(t) dt. (0 < x < 1). \text{ 求 } F''(x).$

$$F(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt + \int_x^1 (t-x) f(t) dt \Rightarrow \text{去绝对值.}$$

$$= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt - \int_x^1 t f(t) dt \Rightarrow \text{把 } x \text{ 移出去!}$$

$$F'(x) = \int_0^x f(t) dt + x \cdot f(x) - x f(x) + \int_x^1 f(t) dt + x \cdot f(x) - x f(x)$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) *$$

二、高阶导数。

△公式(考前背一背!)

$$\cdot (a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

$$\Delta \left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}} < \cdot (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

$$\cdot [\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b + \frac{\pi}{2} n).$$

$$\Delta (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\Delta (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

$$\cdot [(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(1) 归纳法: 求出函数的一阶、二阶、三阶导数后, 归纳规律, 直接写出 n 阶导数表达式.

再用归纳法证明.

(2) 分解法或间接法:

例 3: $y = \frac{5x-1}{x^2-x-2}$. 求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$.

$A(x-2) + B(x+1) = 5x-1 \Rightarrow A=2, B=3$. (取特殊值 $x=2, x=-1$ 快速解出!)

$y = 2 \cdot \frac{1}{x+1} + 3 \cdot \frac{1}{x-2}$

$y^{(n)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + 3 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$. ※

(3) 莱布尼茨公式法 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

当函数由两函数乘积构成时可以考虑, 特别是, 有一因子为次数较低的多项式时!

用莱布尼茨公式: 某更高阶导数会为 0, 则求导结果有多项 0.

例 4: $y = x^3 \sin x$. 求 $y^{(8)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $y^{(8)} = C_8^0 x^3 \sin(x + \frac{8\pi}{2}) + C_8^1 3x^2 \cdot \sin(x + \frac{7\pi}{2}) + C_8^2 6x \sin(x + \frac{6\pi}{2}) + C_8^3 6 \sin(x + \frac{5\pi}{2}) + 0 + \dots$
 $= 6 \cdot \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \cdot 1 = 336$ ※

(4) 幂级数展开 (Taylor 法).

例 5: $y = x \ln(1+x^2)$. $y^{(25)}(0)$.

解: $y = x(x^2 - \frac{x^4}{2} + \dots - \frac{x^{24}}{12} + o(x^{24}))$.

$= x^3 - \frac{x^5}{2} + \dots - \frac{x^{25}}{12} + o(x^{25})$.

所以 $\frac{y^{(25)}(0)}{25!} = -\frac{1}{12}$. $y^{(25)}(0) = -\frac{25!}{12}$ ※

(关于多项式求导可以)

(看出前面项都消掉了!)

<错题> <核心笔记> 第2章 导数与微分

1. 用定义求下列导数

1) $f(x) = x^n$.

2) $f(x) = \sin x$.

1. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. 用定义: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

$f'(x) = \cos x$.

2. $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f(x)}{x} = 0 \cdot 1 = 0 \therefore f(0) = 0$.

(试求 $f(0)$ 与 $f'(0)$).

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{x}{2}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} + cx, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求 a, b, c .

3. 先保证连续 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow a = b = 1$.

再保证可导. $f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow c = 0$. $f(0) = 1$.

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

4. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

4. 原 = $2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + 2x - 2x_0) - f(x_0)}{2x - 2x_0} = 2f'(x_0)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内有 n 阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$.

5. $a = 2, b = -1$.

 $f'(0) \neq 0$. 若 $a f(h) + b f(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是

连续: $\lim_{h \rightarrow 0} [a f(h) + b f(2h) - f(0)] = (a+b-1)f(0) = 0$. $\nearrow$ 无解小.

比 h 高阶的无穷小, 就确定 a, b 的值.

$\therefore f(0) \neq 0 \therefore a+b-1=0$.

导数定义 $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a f(h) + b f(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a f(h) + b f(2h) - (a+b)f(0)}{h}$.

$= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} = (a+2b)f'(0)$.

又 $f'(0) \neq 0 \therefore a+2b=0 \therefore a=2, b=-1$. (也可用洛必达).

6. 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 有二阶导数, 且 $f'(0) \neq 1$.

6. $\frac{dy}{dx} = f'(x+y)(1 + \frac{dy}{dx})$. 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{f'}{1-f'} = -1 + \frac{1}{1-f'}$.

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{f''}{(1-f')^2} (1+y') = \frac{f''}{(1-f')^3}$.

7. 计算 n 阶导数.

7. 积化和差 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

1) $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$. 考到就扔了吧! 你记不住的!

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

$f(x) = \frac{(\cos x - \cos 3x)}{2} \sin 3x = \frac{\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x}{4}$.

$\therefore f(x)^{(n)} = \frac{4^n \sin(4x + \frac{n\pi}{2}) + 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2}) - 6^n \sin(6x + \frac{n\pi}{2})}{4}$.

2) $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$.

2) $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1} = 2 + \frac{5}{2x-1}$.

$f(x)^{(n)} = (2 + \frac{5}{2x-1})^{(n)} = 5 [(2x-1)^{-1}]^{(n)}$.

$= 5 \times 2^n (-1)(-2) \cdots (-n) \cdot (2x-1)^{-n-1}$.

8. $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间和极值. 8. $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$.

8. $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt.$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = \pm 1$. 当 $x > 1$, $\int_1^{x^2} e^{t^2} dt > 0$, $f''(x) > 0$.

... $\downarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

 $\nearrow (-1, 0) \cup (1, +\infty).$

初小值 $f(1) = f(-1) = 0$. 初大值 $f(0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

9. $y^3 - y^2 + xy - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$ 确定 $y = y(x)$, 求 $y = y(x)$

驻点..并判断极值.

9. $3y^2y' - 2yy' + y + xy' - x = 0.$

令 $y' = 0$ 得 $y = x$. 代入原方程 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$.

解得唯一驻点 $x=1$. $(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+xy^2-1=0$

$$y''|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0. \therefore x=1 \text{ 为 } y \text{ 的极小值点.}$$

10. 抛物线 $y = x^2$, $0 \leq x \leq 8$. 上求一点, 使该点切线方

直线 $y=0, x=8$ 所围 $\triangle$ 面积最大.

$$10. S = \frac{1}{2}(b - \frac{a}{2})(16a - a^2) = 64a - 8a^2 + \frac{a^3}{4}.$$
$$s' = 0 \Rightarrow a = \frac{16}{3} \cdot s(\frac{16}{3}) \approx 151.7.$$

端点 $S(0)=0$, $S(8)=128$. $\therefore$ 最大 S 点为 $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$.

11. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$, 求 $f(x)$ 并讨论

$f(x)$ 的连续性和可导性.

$$11. f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1 \\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x = 1 \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

连续性. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a+b=1$, 可连续.

可导性: $f'_-(1) = a$, $f'_+(1) = 2$. $\therefore a = 2, b = -1$ 时可导

12. 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(\frac{x+t}{x-t} \right)^x$, 则 $f'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$12. \text{原} = t \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2t}{x-t}\right)^{\frac{x-t}{2t}} \cdot \frac{2tx}{x-t} = te^{2t}.$$
$$f'(t) = (2t+1)e^{2t}.$$

13. 已知 $y = f(x)$ 对 x 满足 $x f''(x) + 3x [f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$.

13. B. $f''(x_0) = \frac{e^{x_0} - 1}{x_0 e^{x_0}}$

$f'(x_0)=0$. ($x_0 \neq 0$), 则 ()

观察法: $x_0 \rightarrow +\infty$, $f''(x_0) - \text{直} > 0$.

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值. B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

$$x_0 \rightarrow -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{x_0}{x_0 e^{x_0}} = +\infty.$$

C. $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的拐点. D. $f(x_0)$ 不是极值, 不是拐点.

$\therefore f''(x_0) > 0$. $x = x_0$ 是极小值点.

<错题> <数学微分指南·第二章·一元微分学>

1. 设 $f'(1)=4$, 试求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}$.

1. 令 $3-2x=t$, 则 $x=\frac{3-t}{2}$, $x \rightarrow 1, t \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \text{原} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{3-t}{2}-1}{f(t)-f(1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1-t}{2}}{f(t)-f(1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{f(t)-f(1)}{t-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切, 则 $b^2=$.

A. $2a^3$ B. $4a^3$ C. $4a^6$ D. $2a^4$.

2. $\begin{cases} x_0^3-3a^2x_0+b=0 \\ 3x_0^2-3a^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2=a^2 \\ b=2a^2x_0 \end{cases}$ 选 C.

3. 设 $f(x), g(x)$ 均可导, 且 $f(x_0)=g(x_0)=0, f'(x_0)g'(x_0)>0$.

则:

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 驻点. (B) x_0 是驻点, 但不是极值点.

(C) x_0 是驻点, 且是极小值点. (D) x_0 是驻点, 且为极大值点.

3. 构造 $F(x)=f(x)g(x)$.

$$F(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x), F'(x_0)=0, \text{ 驻点.}$$

$$F''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

不要走弯路!!

$$F''(x_0)=2f'(x_0)g'(x_0)>0, \text{ 极小值点. 选 C.}$$

4. 求 $y = \sqrt[5]{\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^3(x-4)}}$ 的导数.

4. 两边取对数 $\ln y = \frac{1}{5}[\ln(x-1)+\ln(x-3)-3\ln(x-2)-\ln(x-4)]$

$$\frac{1}{5} \cdot y' = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-4} \right).$$

$$\therefore y' = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^3(x-4)}} \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-4} \right).$$

(取对数求导可, 可不加绝对值!)

5. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)+xf(x)}{x^2}=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x}=$.

(A) 0 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) ∞ .

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+f(x) \cdot x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)+\ln(1+x)+x \cdot \ln(1+x)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2} \text{ 选 C.}$$

6. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2+f(x))}{x-1} = -1$.

正确的是

(A) $f(1)=0$ (B) $f'(1)=0$ (C) $f'(1)=-1$ (D) $f'(1)$ 不存在

6. 令 $x-1 \rightarrow 0 \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \ln(2+f(x)) = 0 = \ln(2+f(1))$

$$\therefore f(1) = -1. \frac{0}{0} \text{ 洛必达.}$$

选 C.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2+f(x))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+1+f(x)]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+f(x)}{x-1} \cdot \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f'(1)}{1} = -1.$$

7. 设 $f(x) > 0$, 且导数存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} =$.

(A) 0 (B) ∞ (C) $\ln f'(a)$ (D) $\frac{f'(a)}{f(a)}$.

7. 原 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f(a+\frac{1}{n}) - \ln f(a)}{a+\frac{1}{n} - a} = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} \stackrel{\Delta I = n \left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} - 1 \right)}{=} \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

选 D.

8. 若函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=f'(0)=\sqrt{2}$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(h)-2}{h}=$.

(A) 0 (B) 1 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4.

8. 用定义法太慢了! 可直接用洛必达!

$$\text{原} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(h)f'(h)}{1} = 4.$$

9. $f(x) = (x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 选 B. 可能点 $-1, 0, 1, f(x) = (x+1)(x-2)|x+1||x-1|$

$$f(x) = |x| \text{ 在 } x=0 \text{ 处不可导. } f(x) = x|x| \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导.}$$

$$f(x) = (x-x_0)|x-x_0| \text{ 在 } x=x_0 \text{ 处可导, 且 } f'(x_0)=0.$$

$$f(x) = |x-x_0| \text{ 在 } x_0 \text{ 处一定不可导}$$

$\therefore$ 不可导点为 $0, 1$.

10. 如下不等式成立的足

(A) 在 $(-3, 0)$ 区间上, $\ln 3 - x < \ln(3+x)$

(B) 在 $(-3, 0)$ 上, $\ln 3 - x > \ln(3+x)$

(C) 在 $[0, +\infty)$ 区间上, $\ln 3 - x > \ln(3+x)$

(D) 在 $[0, +\infty)$ 上, $\ln 3 - x < \ln(3+x)$

10. 令 $f(x) = \ln(3+x) + x - \ln 3$.

$f'(x) = \frac{x+4}{x+3}$. $x > -3$ 时, $f(x) \uparrow$.

且 $f(0) = 0$. 选 B.

D 不选. $\therefore \ln(3+x) \geq x - \ln 3$.

11. 已知 $f(x) = 3x^2 + kx^{-3}$ ($k > 0$). 当 $x > 0$ 时, 总有 $f(x) \geq 20$ 成立. 则参数 k 的最小取值为

(A) 32 (B) 64 (C) 72 (D) 96

11. $f(x) = 3x^2 + kx^{-3} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{k}{2x^3} + \frac{k}{2x^3}$

$\geq 5 \sqrt[5]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{k}{2x^3} \cdot \frac{k}{2x^3}} = 20$.

$\Rightarrow k = 64$.

特殊解法!

12. 设曲线 $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$, $g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$. 则

(A) 曲线 $f(x)$, $g(x)$ 都有垂直渐近线.

(B) 曲线 $f(x)$, $g(x)$ 都无垂直渐近线.

(C) 曲线 $f(x)$ 有垂直... , $g(x)$ 无...

(D) 曲线 $f(x)$ 无... , $g(x)$ 有...

12. 选 C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0 = 0 \cdot 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = \infty \cdot 0 = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{-t}}{t} = \frac{e^{-t}}{t} \cdot \frac{-t}{1} = \frac{-e^{-t}}{1} = -e^{-t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = 0 \cdot 0$

单独判断渐近线!

13. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$. 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处.

(A) 不可导. (B) 可导且 $f'(a) \neq 0$.

(C) 有极大值 (D) 有极小值.

13. 选 C.

$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1 < 0$.

$\therefore f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$.

14. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域有定义, 且

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处.

(A) 可导 (B) 不一定可导

(C) 可导且 $f'(a) \neq 0$ (D) 可导且 $f'(a) = 0$.

14. 选 B

原式 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h}$

$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{-h} \right]$

若 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$. 若 $x=a$ 处不可导. 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = 0$ 可导.

15. 单调 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上具有连续函数. 且

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 则

(A) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界 (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x) - f(x)] = 0$. (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

15. 选 D.

用 $\ln x$ 可排除 A, B, C.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+a) - f(x)] = 0$.

<第三章 一元函数积分学>

 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

一、不定积分

1. 概念: 原函数 $F(x)$, 满足 $F'(x) = f(x)$.若 $f(x)$ 连续, 则 $f(x)$ 存在原函数. 且原函数也连续.不定积分 $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.2. 基本性质: (1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.(2) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$.(3) $(\int f(x) dx)' = f(x)$ 或 $d \int f(x) dx = f(x) dx$ (4) $\int F'(x) dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$

3. 不定积分的计算 (★ + C 别忘了!)

烂熟组	{	$\int k dx = kx + C$	$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
		$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ (绝对值!)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	
		$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$		

烂熟组 (三角函数)	{	① $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$
		② $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	
		③ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	
		④ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	
		⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C$	
		⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C$	

考前一瞥组 (立方和差)	{	① $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ✓	考前一瞥组 (三角函数)	① $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$
		② $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$ ✓		② $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$
		③ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ ✓		③ $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + C$ ✓
		④ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$		④ $\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + C$ ✓
		⑤ $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C$		

一、第一类换元法。(解积分题的精髓)

二、第二类换元法

- ① 无理 $\rightarrow$ 有理
- ② 三角函数替换
- ③ 倒代换, 指数代换

三、分部积分

- ① $\int x^a \begin{cases} e^x \\ \ln x \\ \arcsin \\ \arccos \end{cases} dx$
- ② $\int e^{ax} \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx$
- ③ $\int \sec^n x (\csc^n x) dx$. n 为奇数.

一、第一类换元法. 找 $d\varphi(x)$! "凑之美".

A. 玩根号 " $\sqrt{\quad}$ ". (x 不是 x , 是 $(x^{\frac{1}{2}})^2$).

例1: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

解: <法一> $I = \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{2^2 - 4x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$. (最快!)

<法二> $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2 - (x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

解: $I = \int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C$.

拿到手就写2倍!

<提醒: 假根号 - 平方差试.
不能 - 真根号. 令 $\sqrt{\quad} = t$.

B. 玩三角函数 " $\int \sin^m x \cos^n x dx$ "

分2种情况求积分

① 当 m, n 均为偶数, 用三角公式降幂. ($\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$).

② 当 m, n 中至少有一个为奇数. 如 $m = 2k+1$.

则 $\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$. 化为关于 $\cos x$ 的多项式

例2: 1) $\int \cos^3 x dx$

解: $I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} (\int 1 dx + \int \cos 2x d(2x)) = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C$.

2) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

解: $I = -\int \cos^2 x (1-\cos^2 x) d(\cos x) = \int (\cos^4 x - \cos^2 x) d\cos x = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

(当 $\sqrt{\quad}$ 的根号内作为函数)积分世界, $\sqrt{\quad}$ 全放分子 (分子有理化)求导世界, $\sqrt{\quad}$ 全放分母 (分母有理化)“ $\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}$ ” “ $\sqrt{\quad} + x$ ” 看情况C. 玩 e^x 家族. (在 e^x, e^{-x}, e^{2x} 间切换).

题型: ① $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx$, 分子为自乘 e^{-x}
 ② $\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}} dx$, $\int \sqrt{1+e^x} dx$, 分子有理化.

例13: 1) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx$

解: 分子分母同乘 e^{-x} . $I = -\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}} de^{-x} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C$
 $= x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}}) + C.$

2) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx$

解: 先分子有理化, 再分母.

即解法为: $I = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}\sqrt{e^x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}\sqrt{e^x+1}} dx = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x} + C.$

3) $\int \sqrt{1+e^x} dx$

解: 假设分母为1, 分子有理化

$I = \int \frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x+1}} dx + \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+e^x}} dx = -2\ln(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{e^x+1}) + 2\sqrt{1+e^x} + C.$

例4: 1) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} dx$

解: 分母有理化后成为常数 $I = \frac{1}{2} \int (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) dx = \frac{1}{6} [(2x+1)^{\frac{3}{2}} - (2x-1)^{\frac{3}{2}}] + C.$

2) $\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2-1}} dx$

解: $I = \int (x^2 - x\sqrt{x^2-1}) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} d(x^2-1) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C.$

二、第二类换元法.

A. 根式替换. (无理 $\rightarrow$ 有理) “真根号”.被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$, 则令 $t = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t^n - b).$ 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$, 则当 k 为 m 和 n 的最小公倍数, 令 $t = \sqrt[k]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t^k - b).$

例15: 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

解: $I = \int \frac{t^2}{1+t} dt = 2 \int (1 - \frac{1}{1+t}) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

$$2) \int \frac{1}{\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+3}} dx$$

解: 取2和3的最小公倍数. 令 $t = \sqrt[6]{x+3} \Rightarrow x = t^6 - 3, dx = 6t^5 dt$.

$$I = 6 \int \frac{t^5}{t^3 - t^2} dt = 6 \int \frac{t^2}{t-1} dt = 6 \int (t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}) dt \\ = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| + C.$$

B. 三角函数替换.

烂熟!

$$\begin{cases} x^2 - a^2 & \xrightarrow{x=asint} a^2 \cos^2 t \\ x^2 + a^2 & \xrightarrow{x=atan t} a^2 \sec^2 t \\ x^2 - a^2 & \xrightarrow{x=asec t} a^2 \tan^2 t. \end{cases}$$

$AX^2 + BX + C \xrightarrow{\text{配方}} (a^2 - x^2) \text{ or } (x^2 - a^2)$ 再用上述替换.

例6: 1) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

(例13(2))

解: 先分子有理化. $I = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \xrightarrow{x=sint} \int \frac{1+\sin t}{\cos t} \cdot \cos t dt \\ = t - \cos t + C = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$

2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

解: $\xrightarrow{x=\tan t} \int \frac{1}{\sec^3 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$



3) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解: $\xrightarrow{x=\tan t} \int e^t \cdot \cos t dt = I = \int e^t d \sin t = e^t \sin t + \int e^t d \cos t \\ = e^t \sin t + e^t \cos t - \int \cos t \cdot e^t dt = I. \\ \therefore I = \frac{1}{2} (e^t \sin t + e^t \cos t) + C = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

C. 倒替换 $x = \frac{1}{t}$ (分母次较高).

例7: $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

倒代换 效果好于三角代换.

解: $\xrightarrow{x=\frac{1}{t}} \int \frac{t^4}{1+t^2} \cdot (-\frac{1}{t^2}) dt = - \int \frac{(t^2-1)+1}{t^2+1} dt = - \int (t^2-1) + \frac{1}{t^2+1} dt \\ = -\frac{1}{3} t^3 + t - \arctan t + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + C.$

三、分部积分法. $\int u dv = uv - \int v du.$

以下三种情况必用分部积分

Case 1 $\int x^a \begin{cases} e^x \\ \ln x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases} dx.$

$u \rightarrow v$ (放在d后面)
反对幂指三

Case 2. $\int e^{ax} \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx.$

谁往后面都行! 谁往前面也行!

Case 3. $\int \sec^n x (\csc^n x) dx. (n \text{ 为奇数})$

进阶版: 1° 循环. $I = \frac{1}{2} ()$. 2° 抵消.

例8: 1) $\int \ln(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}) dx.$

解: $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1}$

$I = \int \ln(1+t) d \frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2} dt$

而 $\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}.$

2) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$

解: $I = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} e^x dx = \int \frac{1}{x+1} e^x dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} e^x dx + \int e^x d \frac{1}{x+1}$
 $= \int \frac{e^x}{x+1} dx + \frac{e^x}{(x+1)} - \int \frac{e^x}{x+1} dx$ 抵消!
 $= \frac{e^x}{x+1} + C.$

3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$

解: $I = \int \frac{1+2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx = \int (\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}) e^x dx = e^x \tan \frac{x}{2} + C.$

$\int (f' + f) e^x dx = e^x f(x) + C.$

4) $\int \frac{x \sin x}{\cos^4 x} dx$

解: $I = \frac{1}{4} \int x d \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{4} (\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{1}{\cos^4 x} dx) = \frac{x}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{4} \int (1 + \tan^2 x) d \tan x$

$= \frac{x}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{4} (\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x) + C.$

$= \frac{x}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{4} (\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x) + C.$

△表格法 | 适用于 $\int e^x \cdot x^2 dx$, $\int \sin x \cdot x^2 dx$, ... 等其中一边的高阶导数为0, 而另一边无穷阶可导。
($e^x, \sin x, \cos x$).

例: 求 $\int e^{2x} \cdot x^2 dx$.

写表格: 用于选择凑项和大概的检验

x^2	$2x$	2	0	← 写到0为止!
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	

Step 1: 高阶导为0的一方不断求导, 无穷阶可导的一方不断求原函数.

Step 2: 斜着配对, 并正负相间配好. (第一对为正).

$$e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x + \frac{1}{4}e^{2x} \cdot 2 - \frac{1}{8}e^{2x} \cdot 0$$

Step 3: 直接写结果.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{4}e^{2x} \cdot 2x + \frac{1}{8}e^{2x} \cdot 2 + C \\ &= e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

四、有理函数的积分.

1. 区分真分式和假分式. 对于 $\int R(x) dx$, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

假分式: $\deg P \geq \deg Q$.

真分式: $\deg P < \deg Q$.

* 其中 $\deg$ 为多项式阶数.

A. 若 $R(x)$ 为假分式, 则 $R(x)$ 分解为“多项式 + 真分式”.

如: $\int \frac{x}{x^2+2} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+2} \right) dx$

$$\int (x^2 - x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

B. 若 $R(x)$ 为真分式, 则 $R(x)$ 因式分解.

真分式可以化为下述四种类型 (取决于分母).

① $T_1 = \frac{A_1}{x-a} \rightarrow$ 分母含因子 $(x-a)$.

② $T_2 = \frac{A_2}{(x-a)^n} \rightarrow$ 分母含因子 $(x-a)^n$.

只要出现了 $\frac{A_2}{(x-a)^n}$, 必须同时出现 $\frac{A_{21}}{x-a} + \frac{A_{22}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{2n}}{(x-a)^n}$ (从1次写到n次).

③ $T_3 = \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} \rightarrow$ 分母 x^2+px+q 无法配方, 分子写成 x 的一次式! 带 x !

④ $T_4 = \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^n} \rightarrow$ 同③, 从1次写到n次.

2. 因式分解方法.

$$\begin{cases} \textcircled{1} \frac{x-2}{(x+1)(2x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} \\ \textcircled{2} \frac{x^2+2}{(x+1)(2x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2} \\ \textcircled{3} \frac{3x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \end{cases}$$

以②为例, 特值代入, 快速求出 A, B, C.

$$\text{通分 } (2x-3)^2 A + (x+1)(2x-3) B + (x+1) C = x^2 + 2$$

Step 1: 盯着括号写, 使部分括号为 0, 代特值.

$$1^\circ \text{ 将 } x = \frac{3}{2} \text{ 代入} \Rightarrow \frac{5}{2} C = \frac{17}{4} \Rightarrow C = \frac{17}{10}$$

$$2^\circ \text{ 将 } x = -1 \text{ 代入} \Rightarrow 25A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{25}$$

Step 2: 没有 0 可以代, 那么代简单的数. 如令 $x = 1$.

$$3^\circ \text{ 将 } x = 1 \text{ 代入} \Rightarrow A - 2B + 2C = 3$$

$$\therefore \frac{3}{25} - 2B + \frac{17}{10} = 3 \Rightarrow B = \frac{13}{50}$$

$$\therefore I = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{13}{50} \cdot \frac{1}{2x-3} + \frac{17}{10} \cdot \frac{1}{(2x-3)^2}$$

例 9: 1) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx$

解: $\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

$$5x-1 = A(x-2) + B(x+1) \Rightarrow A=2, B=3$$

$$\begin{cases} x=2, & 3B=9 & B=3 \\ x=-1, & -3A=-6 & A=2 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C$$

△ 2) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ → 凑数

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

△ 计算一定技巧! 分解是最后的方法!

3. 三角函数化为有理数积分.

形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

$$\tan \frac{x}{2} = u \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{2}{1+u^2} du \end{cases} \quad (\text{尽量不用!})$$

例110: 1) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \sec^2 \frac{x}{2} d(\frac{x}{2}) = \tan \frac{x}{2} + C.$

解题方向: 两角合一, 变为彻底因式.

2) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \csc(x+\frac{\pi}{4}) d(x+\frac{\pi}{4})$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\csc(x+\frac{\pi}{4}) - \cot(x+\frac{\pi}{4})| + C.$

解题方向: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x+\frac{\pi}{4})$, 内化!

3) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + \tan^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \tan x)}{1+(\sqrt{2} \tan x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} \tan x + C.$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 x (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})} dx$ 牢记 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

解题方向: $\frac{1}{\sin^2 x + 1}$ 所独有, 最好用解法!

4) $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$
 $= \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{1+\tan \frac{x}{2}} d(\frac{x}{2}) = \int \frac{d(1+\tan \frac{x}{2})}{1+\tan \frac{x}{2}} = \ln |1+\tan \frac{x}{2}| + C.$

5) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^4 x} dx$
 $= \int \frac{d \sin^2 x}{2^2 + (\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

6) $\int \frac{dx}{1+2 \tan x}$

<法一> $\tan x = t, I = \int \frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} dt$

$\frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$

Δ <法二> $I = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$

$\frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} = a(2 \sin x + \cos x)' + b(2 \sin x + \cos x)$

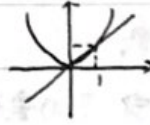
$\begin{cases} 2a-b=0 \\ a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{5}, b=\frac{2}{5}.$

$\therefore I = \int \frac{\frac{1}{5}(2 \sin x + \cos x)' + \frac{2}{5}(2 \sin x + \cos x)}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + C.$

当分子分母都含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 时, 将分子化为“分母+分母导数”!

五、分段函数的不定积分。(比较重要的题型)

例11: $\int \min\{x^2, x\} dx = ?$



解: $\min\{x^2, x\} = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1. \end{cases}$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

“被积函数可导, 函数连续!”

令 $C_2 = C$. 由 $\begin{cases} C_1 = C_2 = C \\ \frac{1}{3} + C = \frac{1}{2} + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = C - \frac{1}{6} \\ C_1 = C_2 = C. \end{cases}$

$$\therefore I = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + C, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C - \frac{1}{6}, & x > 1. \end{cases}$$

<补充> <凑微分法>

① $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b).$

② $\int f(ax^b) x^{b-1} dx = \frac{1}{ab} \int f(ax^b) d(ax^b)$

③ $\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x).$

④ $\int f(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int f(\sqrt{x}) d\sqrt{x}$

⑤ $\int f(\frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} dx = - \int f(\frac{1}{x}) d\frac{1}{x}.$

⑥ $\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) de^x.$

<换元法>

① 被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$.

令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$. 则 $x = \frac{1}{a}(t^n - b).$

② 被积函数含有 $\sqrt{e^x \pm a}$.

令 $t = \sqrt{e^x \pm a}$. 则 $x = \ln(t^2 \mp a).$

△ $F(x)$ 与 $f(x)$ 常见性质的相互关系:

$F(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 是偶函数.

当 $f(x)$ 是偶函数, 且 $F(0)=0 \Rightarrow F(x)$ 是奇函数.

△ $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

$F(x)$ 是周期函数 $\Rightarrow f(x)$ 是周期函数.

当 $f(x)$ 是周期函数, 且 $\int_0^T f(x) dx = 0 \Rightarrow F(x)$ 是周期函数.

<例题> <核心笔记·第三章·一元函数积分学>

▲+C!!! ▲换元后回代!!

1. $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法1} \quad & \begin{aligned} & x = \sin t, \quad dx = \cos t dt \\ & \int \frac{\sin t}{(1+\sin^2 t) \cos t} dt = -\int \frac{d \cos t}{2-\cos^2 t} \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\cos t} + \frac{1}{\sqrt{2}-\cos t} \right) d \cos t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t} + C \\ & = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}} + C. \end{aligned} \end{aligned}$$

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法2} \rightarrow & \text{令 } x = \frac{1}{t}, \quad I = -\int t \sqrt{1-t^2} dt \xrightarrow{t=\sin u} -\int \sin u \cos^2 u du \\ & = \frac{1}{3} \cos^3 u + C = \frac{\sqrt{x^2-1}^3}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法3} \rightarrow & \text{令 } x = \sec t, \quad I = \int \frac{\tan t}{\sec^4 t} \tan t \sec t dt \\ & = \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{3} \sin^3 t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}^3}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法4} \rightarrow & \text{令 } x = \frac{1}{t}, \quad I = -\int \frac{t dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{1+t^4}} \\ & \text{令 } t^2 = \tan u, \quad I = -\frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 u}{\sec u} du = -\frac{1}{2} \ln |\tan u + \sec u| + C \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法5} \rightarrow & \text{上下同乘 } x^3, \quad I = \int \frac{x^3 dx}{x^4 \sqrt{1+x^4}} \quad \text{令 } u = x^4 \\ & I = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u \sqrt{1+u}} \quad \text{令 } \sqrt{1+u} = t, \quad I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-1} \\ & = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1} \right| + C \\ & = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

依1法通，错法一样↓

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^4}} dx = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x^4} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} d \left(\frac{1}{x^4} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^4} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + C. \quad \times \quad \text{以 } (x^4)' = -4 \cdot x^{-3} \times \quad \text{错!} \end{aligned}$$

4. $\int \frac{dx}{x(x^8+1)}$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法6} \rightarrow & \text{上下同乘 } x^7, \quad I = \int \frac{x^7 dx}{x^8(x^8+1)} = \int x^7 \left(\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^8+1} \right) dx \\ & = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{8} \int \frac{d(1+x^8)}{1+x^8} = \ln |x| - \frac{1}{8} \ln(1+x^8) + C \\ \checkmark \text{法7} \rightarrow & \text{令 } x = \frac{1}{t}, \quad I = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t^8} + 1 \right)} dt = -\int \frac{t^7 dt}{t^8+1} \\ & = -\frac{1}{8} \ln(1+t^8) + C = -\frac{1}{8} \ln(1+\frac{1}{x^8}) + C. \end{aligned}$$

5. $\int x^2 \sin^2 x dx$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{法8} \rightarrow & \text{降次+分部积分, } I = \frac{1}{2} \int x^2 (1-\cos 2x) dx \\ & = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} \int x^2 d(\sin 2x) \\ & = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{4} \int x d \cos 2x \\ & = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \int \cos 2x dx \\ & = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

6. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

6. 令 $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}, x = \frac{t^2}{1-t^2}.$

$$I = \int \arcsin t d\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right) = \frac{t^2}{1-t^2} \arcsin t - \int \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

$$\text{令 } t = \sin u, \therefore \int \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \int \frac{\sin^2 u}{\cos^3 u} du = \int (\sec^2 u - 1) du$$

$$= \tan u - u + C = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t + C.$$

$$\therefore I = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + C$$

! 被积函数中有 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 令 $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则原式变为有理函数积分.

7. $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$

7. $I = \int \frac{x-3}{x^2-6x+13} dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \int \frac{1}{(\frac{x-3}{2})^2+1} d(\frac{x-3}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + C.$$

8. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$

8. $I = \int \frac{x^4+1-1}{x^2+1} dx = \int (x^2-1) dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

9. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

9. <法1>. $I = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$

<法2>. $I = \int \frac{1}{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2} dx$ 上下同除 $(\cos \frac{x}{2})^2$

$$I = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{(1+\tan \frac{x}{2})^2} dx = 2 \int \frac{d(1+\tan \frac{x}{2})}{(1+\tan \frac{x}{2})^2}$$

$$= -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C.$$

区间平均值 = $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

No.

Date

二、定积分

1. 定义: (1) $\int_a^b f(x) dx \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 分割 近似、求和、取极限

 曲边梯形面积.

(2) 变上限积分函数 $f(x) \in [a, b]$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \text{ 则 } \Phi'(x) = f(x)$$

2. 性质: (1) 线性性质: $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$.

(2) 区间可加性: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

(3) $\int_a^b 1 dx = b-a$

(4) 比较性质: 如果在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \geq 0$, 则有 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

推论: 如果在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \geq g(x)$, 则有 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

(5) 估值定理: 设 M 和 m 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值.

$$\text{则有 } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(6) 积分中值定理: 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ

$$\text{使得 } \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

3. 常见定理: (1) 可积的充分条件.

1° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow$ 可积.

2° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个第一类间断点 $\Rightarrow$ 可积.

3° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界 $\Rightarrow$ 可积.

(2) 微积分基本定理:

1° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导.

$$\text{且 } \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), a \leq x \leq b.$$

2° 原函数存在定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

3° 牛顿-莱布尼茨公式:

如果 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$$

4. 特殊定积分的重要计算性质.

$$= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx$$

① $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } f(-x) = -f(x), \text{ 即 } f(x) \text{ 为奇函数.} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{当 } f(-x) = f(x), \text{ 即 } f(x) \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

② $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$. (因为 $\sin x > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上).

$\int_0^\pi f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$. (因为 $\cos x > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上)

③ $\int_0^{2\pi} f(|\sin x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

④ $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

$\int_0^\pi x f(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

⑤ 华里士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数.} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的奇数.} \end{cases}$$

例: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = \frac{7}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ (点火成功)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx = \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ (发射失败).

⑥ $f(x)$ 在 T 为周期.

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt. \text{ (平移性质)}$$

$$\int_0^{n \cdot T} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt.$$

⑦ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

Bonus: Γ 函数 (非常好用! 尤其在概率统计中).

定义: Γ 函数 $\triangleq \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha)$

有 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (必考!)

例: 1) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{8} \int_0^\infty (2x)^2 e^{-2x} d(2x) \triangleq \frac{1}{8} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{8} \Gamma(3) = \frac{1}{4}$

3) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sqrt{x^2} e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

5. 定积分的计算

变限积分计算

定积分计算

利用计算性质

利用对称法 奇偶性! 简化计算!

一、变限积分的计算. “二法不说, 分部积分”

例1: $f(x) = \int_1^x e^{-x^2} dx$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx x^3 = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 x^2 e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{6} \int_0^1 x e^{-x} dx = -\frac{1}{6} (1 - 2e^{-1}). \end{aligned}$$

例2: $f(x) = \int_0^x \arctan(x-1)^2 dx$. 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \arctan(x-1)^2 dx \\ &= f(1) - \int_0^1 [(x-1)+1] \arctan(x-1)^2 dx \\ &= f(1) - \int_0^1 \arctan(x-1)^2 dx - \int_0^1 (x-1) \arctan(x-1)^2 d(x-1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x dx = \frac{1}{2} (x \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

例3: $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$. 求 $\int_0^\pi f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{\pi-x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{\pi-x} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi-x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2. \end{aligned}$$

二、利用定积分的重要计算性质计算定积分.

例4: 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx$

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin^4 x}{1+e^x} + \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} \right) \sin^4 x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

2) $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$. 求 $f(x)$.

$$\text{解: 令 } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = A \quad \therefore f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + A.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} A \sin x dx \rightarrow \text{奇函数}$$

$$\therefore A = 2 \int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\pi \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x} d(\cos x) = -\pi \arctan(\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3) $\int_0^{\pi^2} \sin^4 \sqrt{x} dx$

$$\text{解: 令 } \sqrt{x} = t. \quad I = \int_0^\pi \sin^4 t \cdot 2t \cdot dt = 2\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi^2.$$

4) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1} dx.$

解: 令 $\sqrt{e^{2x}-1} = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(t^2+1).$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} t \cdot \frac{t}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

5) $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx$

解: $I = \int_0^2 [(x-1)+1]^2 \sqrt{1-(x-1)^2} d(x-1) = \int_{-1}^1 (x+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 (1+x^2) \sqrt{1-x^2} dx$

令 $x = \sin t$. $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2 t) \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2 t) dt = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2})$

三、利用对称性计算定积分.

例5: 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

解: <法一> $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx$

<法二> 令 $x+t = \frac{\pi}{2}$ $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$\therefore 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x}$

解: 令 $x+t = \frac{\pi}{2}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-dt}{1+\cot^{\sqrt{2}} t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cot^{\sqrt{2}} x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{\sqrt{2}} x}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} dx$

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

<补充> 重要计算方法:

1. 换元法: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x = \varphi(t)$ 满足 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi(t)$ 连续.

$\therefore \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. △ 换元后, 上下限变化! 无需回代!
(令 $x \pm \text{常数} = t$ 或 $x = \text{常数} \pm t$, 别用不等式!)

2. 分部积分法: $\int_a^b u(x)v(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.

<补充> 变上限积分求导: $[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt]' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$.

积分号下含有 x 的 3 种处理方式:

① $[\int_a^x x f(t) dt]' = [x \int_a^x f(t) dt]' = \int_a^x f(t) dt + x f(x)$.

② $[\int_a^x (x-t) f(t) dt]' = [x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt]' = \int_a^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_a^x f(t) dt$.

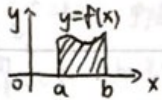
③ 形如 $[\int_0^x f(x-t) dt]'$: 令 $x-t = u$. $\int_0^x f(x-t) du = \int_x^0 f(u) (-du) = \int_0^x f(u) du$

故 $[\int_0^x f(x-t) dt]' = [\int_0^x f(u) du]' = f(x)$.

[$\int_0^x (t^2+a) dt$]' = x^2+a .

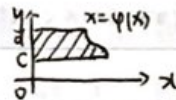
三、定积分的应用.

1. 平面图形的计算公式



$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

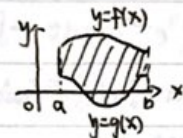
$$\text{绕 } x \text{ 轴: } V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



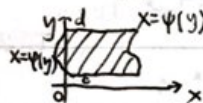
$$S = \int_c^d \varphi(y) dy.$$

y 的范围

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



$$S = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)] dy.$$

2. 经济应用.

总成本函数 $C = C(P)$.

积分 $\xrightarrow{\text{求导}} \text{Cost. 边际成本 } MC = \frac{dC}{dP}$

总收益函数 $R = R(P)$.

积分 $\xleftarrow{\text{求导}} \text{ 边际收益 } MR = \frac{dR}{dP}$

$$C(P) = \int_0^P (MC) dt + C_0$$

$$R(P) = \int_0^P (MR) dt$$

<核心笔记> 第3章. 不定积分

1. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\tan x}{1+x^2} + x^8) dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) dx$.

$P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x) dx$. 则有 ()

(A) $P > N > M$. (B) $N > P > M$. (C) $N > M > P$. (D) $P > M > N$.

2. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ ().

(A) 为正常数. (B) 为负常数. (C) 恒为零. (D) 不为常数.

3. $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$.

4. 设 $f(t) = \int_0^1 t|t-x| dx$. 试计算 $\int_{-1}^2 f(t) dt$.

5. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$. 已知 $f(1) = 1$.

求 $\int_1^2 f(x) dx$.

1. D.

利用奇偶性. $M = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx$

$N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$. $P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < x < \tan x < 1$.

2. A.

$F(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d \cos t$

$= -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos t dt$

$= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0$.

3. 令 $e^{2x} = t$. (上下限勿错!)

$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-t}}{2t} dt$ 令 $\sqrt{1-t} = u$.

开方时注意! $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{u^2}{1-u^2} du = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{1-u^2} + 1) du$.

$= (-\frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} + u) \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = -\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 先去掉绝对值. $0 < x < 1$

当 $t \leq 0$. $I = \int_0^1 t(x-t) dx = \frac{t}{2} - t^2$.

当 $0 < t < 1$. $I = \int_0^t t(t-x) dx + \int_t^1 t(x-t) dx$
 $= \frac{t}{2} - t^2 + t^3$.

当 $t > 1$. $I = \int_0^1 t(t-x) dx = t^2 - \frac{t}{2}$.

$\therefore \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 (\frac{t}{2} - t^2) dt + \int_0^1 (\frac{t}{2} - t^2 + t^3) dt$
 $+ \int_1^2 (t^2 - \frac{t}{2}) dt = \frac{7}{6}$.

5. 令 $u = 2x - t$. $dt = -du$.

$I = - \int_{2x}^x (2x-u) f(u) du$

$= 2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du$.

两边求导: $2 \int_x^{2x} f(u) du = \frac{x}{1+x^2} + x f(x)$

令 $x = 1$. 得 $2 \int_1^2 f(u) du = \frac{3}{2}$.

$\therefore \int_1^2 f(u) du = \frac{3}{4}$.

6. 设 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$. 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

6. 直接分部积分. $I = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx$
 $= - \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2)$
 $= \frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e^{-1} - 1}{2}.$

$f'(x) = e^{-x^2}.$

7. 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 与一条切线 l , 使该曲线与切线 l

7. 把图画对! 

及直线 $x=0, x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

设切点 $(t, \sqrt{t})$. $y = \frac{1}{2\sqrt{t}} x + \frac{\sqrt{t}}{2}.$

$S(t) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} x + \frac{\sqrt{t}}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{t}} t\sqrt{t} - \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}.$

$S'(t) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}.$

$S'(t) = 0$ 得 $t = 1$. $S''(1) > 0$. $S(t)_{\min}.$

切线方程 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$

8. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 及直线 $l: x + y = t (t \geq 0)$. 若 $S(t)$

8. $S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{2} t^2 + 2t - 1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2. \end{cases}$

表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积.

$\int_0^x S(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{6} x^3, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6} x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2. \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$

试求 $\int_0^x S(t) dt (x > 0)$.

9. 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

9. 令 $F(x) = \int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$

A. $\int_0^x t f(t) dt$ B. $\int_0^x t f(-t) dt$

$F(-x) = \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)] dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x (-u)[f(-u) + f(u)](-du)$

C. $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$ D. $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$

$= \int_0^x u[f(u) + f(-u)] du = F(x).$ 选 D.

10. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx =$

10. $I = - \int \ln \sin x d \cot x$

$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x dx$

$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C.$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1.$

$(\cot x)' = -\frac{\csc^2 x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

11. $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x^2 + 5} =$

11. 凑平方. $x^2 + 2x^2 + 5 = (x^2 + 1)^2 + 4$. 令 $t = x^2 + 1$. $dt = 2x dx$

$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C.$

$= \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C.$

☆ 证 → 2 证 ☆ secx, cosx

母降次! 母凑微. "+1-1". 母消因式

☆ $\ln|x|$

"降次"(同构)

12. $\int \frac{x \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12 法: $I = \int \frac{x \cos^2 \frac{x}{2}}{8 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{8} \int \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin^3 \frac{x}{2}} dx$
 $= -\frac{1}{8} \int x d(\sin^2 \frac{x}{2}) = -\frac{1}{8} x \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$
 $= -\frac{1}{8} x \sec^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C$

法: $I = \frac{1}{8} \int \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin^3 \frac{x}{2}} dx = -\frac{1}{4} \int x \cot \frac{x}{2} d \cot \frac{x}{2}$
 $= -\frac{1}{8} \int x d(\cot^2 \frac{x}{2}) = -\frac{1}{8} x \cot^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \int \cot^2 \frac{x}{2} dx$
 $= -\frac{1}{8} x \cot^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \int (\csc^2 \frac{x}{2} - 1) dx = -\frac{1}{8} x \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C.$

13. $\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

13. $I = -\int \operatorname{arccot} e^x d(e^{-x}) = -e^x \operatorname{arccot} e^x - \int e^{-x} \operatorname{arccot} e^x dx$
 $= -e^x \operatorname{arccot} e^x - \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ (1 arccot x)
 $= -e^x \operatorname{arccot} e^x - \int (1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}) dx = -\frac{1}{1+x^2}$
 $= -e^x \operatorname{arccot} e^x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - x + C$

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

14. $I = \int \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int (\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) d(1+x^2)$
 $= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

或 $I = \int x^2 d\sqrt{1+x^2} = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} d(x^2+1)$
 $= x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ 或 $x = \tan t$ $\cot t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

15. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时,
 $f(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$. 已知 $F(0) = 1$, $F(x) > 0$.

试求 $f(x)$.

15. $F'(x) = f(x)$. $2F(x)F'(x) = \frac{x e^x}{(1+x)^2}$
 $\therefore \int 2F(x)F'(x) dx = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$
 $F^2(x) = \frac{e^x}{1+x} + C.$

$F(0) = 1$. $F^2(0) = 1 + C$. $\therefore C = 0$.

$\therefore F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$. ($F(x) > 0$) $\therefore f(x) = \frac{x e^{\frac{1}{2}x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

16. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

16. 令 $u = \sin^2 x$. $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
 $I = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x}$
 $= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x}$
 $= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

17. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

17. 法: 设 $x = \tan t$.

$I = \int \frac{e^{t \tan t}}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} \sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt$
 $\int e^t \sin t dt = -\int e^t d \cos t = -(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt)$
 $= -e^t \cos t + \int e^t \sin t dt - \int e^t \sin t dt$

$\therefore \int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

法二: 分部积分. $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x}$
 $= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x}$
 $= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

移项得 $I = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$

18. $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) = \frac{1}{2} (x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx)$
 $= \frac{1}{2} (\frac{\pi}{4} + \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln 2.$

19. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx.$

19. $I = \int_0^{\ln 2} e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} dx = - \int_{\ln 2}^0 \sqrt{e^{2x}-1} de^{-x}$
 $= -e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln e^x + \sqrt{e^{2x}-1} \Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2 + \sqrt{3}.$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C.$

或令 $e^{-x} = \sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt.$

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$
 $= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\int \sin x dx = \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$

20. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$. 求 $f(x) + f(\frac{1}{x})$.

20. $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ 令 $t = \frac{1}{y}$

$= \int_1^x \frac{\ln y}{y(1+y)} dy = \frac{1}{2} \ln^2 x.$

$\therefore f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$

21. 设 $x \geq -1$. 求 $\int_{-1}^x (1-t) dt$.

21. 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $I = \int_{-1}^x (1+t) dt = \frac{1}{2} (1+t^2) \Big|_{-1}^x$

$= \frac{1}{2} (1+x^2).$ 当 $x \geq 0$ 时, $I = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt$
 $= 1 - \frac{1}{2} (1-x)^2.$

22. 在第一象限内求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使

22. 设点 (x_1, y_1) . $y - y_1 = -2x_1(x - x_1)$

该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成

$S(x_1) = \frac{1}{2} ab - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{1}{4} (x_1^3 + 2x_1 + \frac{1}{x_1}) - \frac{3}{4}.$

的图形面积为最小, 并求此最小面积.

$S'(x_1) = \frac{1}{4} (3x_1^2 - 2 - \frac{1}{x_1^2}) = \frac{1}{4} (3x_1 - \frac{1}{x_1})(x_1 + \frac{1}{x_1}) = 0$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \therefore S''(x_1) \Big|_{x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0.$ 分母同乘!

$\therefore$ 点 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$ 为所求.

此时 $S(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3} (2\sqrt{3} - 3).$

<标题> 数学高分指南·第三章·一元函数积分学

1. 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$

1. 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$. $dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt$. $x = \frac{1}{t^2-1}$.
 $I = \int (t^2-1) \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt$
 $= -2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = -2t - \int \frac{2}{t^2-1} dt$
 $= -2t - \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt = -2t - \ln|t-1| + \ln|t+1| + C$
 $= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1} \right| + C.$

2. 设 $f(x)$ 满足 $\int x f(x) dx = x^2 e^x + C$. 求 $\int f(x) dx$.

2. 对两边求导.

$x f(x) = x^2 e^x + 2x e^x \Rightarrow f(x) = x e^x + 2e^x.$

$\therefore \int f(x) dx = \int (x e^x + 2e^x) dx = (x-1)e^x + 2e^x + C$

3. 求 $\int_{-1}^1 x (1+x^{2007}) (e^x - e^{-x}) dx$

3. 原式 $= 2 \int_0^1 x (e^x - e^{-x}) dx = 2 \int_0^1 x d(e^x + e^{-x})$
 $= 2 [x(e^x + e^{-x})]_0^1 - (e^x - e^{-x})|_0^1 = \frac{4}{e}.$

$e^x - e^{-x}$ 是奇函数.

4. 已知 $\int_{-a}^a \frac{x+1}{2+x^2} dx = \ln 3$, 则 $a =$ ____.

A. 2. B. 1. C. 2 or -2. D. -1.

4. $\int_{-a}^a \frac{x+1}{x^2+2} dx = \int_0^a \frac{2x}{x^2+2} dx = \int_0^a \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} \quad a>0$
 $= \ln(2+x^2)|_0^a = \ln 3 \Rightarrow a=2.$ 选 A. $\frac{1}{2}$ 全对

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 连续, 则 $\int_0^a f(x) dx =$ ____.

A. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(x-a)] dx$

B. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(a-x)] dx$

C. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) - f(x-a)] dx$

D. $\int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) - f(a-x)] dx.$

5. 变量替换!

选 B. $\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx.$ 令 $a-x=t.$ $-dx=dt.$
 $= \int_{\frac{a}{2}}^a f(t) dt = \int_{\frac{a}{2}}^a f(t) dt.$

$\therefore \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$

6. 已知 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

$f(1)=1$. 则 $\int_1^2 f(x) dx =$ ____.

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $3 \ln 2$ D. $\frac{3}{2} \ln 2.$

6. 令 $2x-t=u.$ $I = \int_{2x}^x (2x-u) f(u) du$
 $= 2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

两边求导 $\Rightarrow 2 \int_x^{2x} f(u) du - x f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$

令 $x=1. \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{4}.$ B.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$. 则方程

$\int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$ 在 (a, b) 内根有

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个.

7. $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$

$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt < 0.$

$F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0. \therefore F(x)$ 在 (a, b) 有根.

$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2 > 0. \therefore F(x)$ 唯一根.

8. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = x^2 + \int_0^1 x f(t) dt$. 则 $f(x) =$ _____.

A. $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$.

B. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$.

C. $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x$.

D. $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x$.

8. 令 $A = \int_0^1 f(t) dt$. $\Rightarrow f(x) = x^2 + Ax$.

积分: $A = \int_0^1 (x^2 + Ax) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}Ax^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}A$

$\therefore A = \frac{2}{3}$. $\therefore f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$. (A)

9. 求曲线 $xy=1$, $y=x$, $y=2$ 所围平面图形的面积.

9. $S = \int_{\frac{1}{2}}^2 (y - \frac{1}{y}) dy = (\frac{1}{2}y^2 - \ln y) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$.

y的范围

10. 求 $y=2-x^2$ 和 $y=2x+2$ 所围平面图形的面积.

10. $\int_{-2}^0 [(2-x^2) - (2x+2)] dx = \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x) dx = \frac{4}{3}$.

$= -\frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big|_{-2}^0 = -(-\frac{1}{3}(-8) - 4) = -(\frac{8}{3} - 4) = \frac{4}{3}$

11. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 原函数, 且 $f(x)F(x) = e^{4x}$, $F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

11. $\int f(x)F(x) dx = \frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + C$.

$F(x) > 0$. 则 $f(x) =$ _____.

$\frac{1}{2}F^2(0) = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 0$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x}$

C. $2e^{2x}$

D. $\sqrt{2}e^{2x}$

$F^2(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$. 又 $F(x) > 0$. $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x}$

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x} \cdot 2 = \sqrt{2}e^{2x}$. D.

12. $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{x}-\sqrt{t}}{1+t} dt$. 求 $F'(x)$.

12. $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{x}-\sqrt{t}}{1+t} dt = \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{1+t} dt - \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$

$= \sqrt{x} \int_0^x \frac{dt}{1+t} - \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$.

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{dt}{1+t} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{dt}{1+t}$.

13. 设曲线过点 $(1,2)$. 并且它的每一点 (x,y) 处的

13. $y' = \frac{2}{y}$. $y dy = 2 dx$. $\therefore \frac{1}{2}y^2 = 2x + C$.

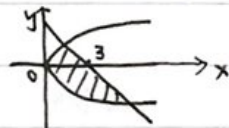
切线斜率为 $\frac{2}{y}$. 求该曲线方程, 以及该曲线

代入 $(1,2)$. $C=0$. $\Rightarrow y^2 = 4x$.

与其在点 $(1,2)$ 处的法线所围成的平面图形的面积.

$k_{切} = 1$. $k_{法} = -1$. $\therefore y-2 = -(x-1) \Rightarrow x+y-3=0$

$\therefore S = \int_0^2 (3-y - \frac{y^2}{4}) dy = \frac{64}{3}$. 交点 $(1,2)$ $(9,-6)$.



14. 求 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

14. 别搞复杂了!!! 要快! 复杂了! 所以有时答案才不对!

$I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} d(\ln x) \stackrel{\ln x = u}{=} \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du = \int \frac{u+1-1}{\sqrt{1+u}} du$

$= \int (\sqrt{1+u} - \frac{1}{\sqrt{1+u}}) d(1+u) = \frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} - 2(1+u)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$.

15. 求 $\int_{-1}^1 (1+\sqrt{1-x^2}) dx =$ _____.

15. $y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$. $x^2 + y^2 = 1$.

面积 $= \int_{-1}^1 1 dx + \frac{\pi}{2} = 2 + \frac{\pi}{2}$.

不要画圆

$y = 1 + \sqrt{1-x^2}$
 $x^2 + y^2 = 1$

(1) 不看清楚范围!

定积分没有 "+C!" !!!

16. $\int_0^a \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

$$16. I = \int_0^a x d \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \frac{a}{1+e^{-a}} - \int_0^a \frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{a}{1+e^{-a}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^a$$

$$= \frac{a}{1+e^{-a}} - \ln(1+e^a) + \ln 2.$$

17. 已知 $f(0)=0$, 且 $f'(x) \cdot \int_0^x f(x) dx = 8$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

17. $\int_0^x f(x) dx = A, \therefore f(x) = \frac{8}{A} \cdot x + C.$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \therefore f(x) = \frac{8}{A} x$

$\int_0^x f(x) dx = \frac{8}{A} \int_0^x x dx = \frac{16}{A} = A$

$\therefore \int_0^x f(x) dx = 4 \quad f(x) = 2x$

18. $\int \sqrt{e^x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

18. 令 $\sqrt{e^x+1} = t, e^x+1=t^2, x=\ln(t^2-1).$

$$I = \int t \cdot \frac{2t}{t^2-1} dt = 2 \int (1 + \frac{1}{t^2-1}) dt = 2t \ln \frac{t-1}{t+1} + C$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln(\sqrt{e^x+1}-1) - \ln(\sqrt{e^x+1}+1) + C.$$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + 3\sqrt{x^3}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

19. 令 $x=t^2, dx=2t dt, I = \int \frac{2t}{t^2+3t^3} dt$

$$= 6 \int \frac{t^2}{1+t^3} dt = 6 \int (t-1 + \frac{1}{1+t^3}) dt = 6(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t^3|) + C.$$

$$= 3\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 6\ln|1+\sqrt{x}| + C.$$

20. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

20. 分部积分, $I = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

21. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

21. 求导, $g[f(x)] f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x.$

$g(t) = x, t = f(x) \Rightarrow g[f(x)] = x.$

$\therefore x f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^x + x e^x$

$f(x) = \int (2e^x + x e^x) dx = 2e^x + x e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$

$\because f(0)=0, \therefore C=-1, \therefore f(x) = (x+1)e^x - 1.$

22. 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续, $f(1)=3$.

且 $\int_1^x f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt.$

$(x>0, y>0),$ 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

22. 对 y 求导, $f(xy) \cdot x = x f(y) + \int_1^x f(t) dt$

令 $y=1, \Rightarrow x f(1) = 3x + \int_1^x f(t) dt.$

再对 x 求导, $f(x) + x f'(x) = 3 + f(x).$

$f'(x) = \frac{3}{x}, \therefore f(x) = 3 \ln x + C.$

$\text{又 } f(1)=3, \therefore C=3, \therefore f(x) = 3 \ln x + 3.$

<第四章>多元函数的微分

一、定义

1. 极限的定义. 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内有定义, 若存在常数 A , 对任意给定的 $\varepsilon > 0$,

总存在 $\delta > 0$, 只要 $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, 就有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$,

则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 或 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \rightarrow$ 极限.

2. 连续的定义. 设 $f(x, y)$ 在 D 内有定义, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点且 $P_0 \in D$.

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

3. 偏导数定义.

对 x 的偏导数: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0}$

记作 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $z'_x \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $f'_x(x_0, y_0)$.

对 y 的偏导数: $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

记作 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $z'_y \Big|_{x=x_0, y=y_0}$, $f'_y(x_0, y_0)$.

4. 全微分.

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$. 其中 A, B 仅依赖于 x, y . 而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关.

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微. 其中 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$

在点 (x, y) 的全微分, 记作 dz . 即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$. $\rightarrow$ 线性主部.

1° 全增量: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

2° 线性增量 $dz \triangleq A\Delta x + B\Delta y$.

其中 $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$ 是常数.

3° 可替代性: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \Rightarrow$ 可微.

Δ 求法: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

例: 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$. 求 $f'_x(0, 1)$, $f'_y(0, 1)$, $dz|_{(0, 1)}$.

[分析] $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} [f(x, y) - 2x + y - 2] = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = 1 = f(0, 1) \rightarrow$ 连续.

又 $f(x, y) - 2x + y - 2 = o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}) \rightarrow$ 点题! 零!

$$z = f(x, y) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

$$f(x, y) - f(0, 1) = 2(x-0) + (-1)(y-1) + o(\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2})$$

$$\therefore A: f'_x(0, 1) = 2 \quad B = f'_y(0, 1) = -1. \quad dz = 2dx - dy.$$

[如果是选择/填空题: 由 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1} [f(x, y) - 2x + y - 2] = 0$.

特值法: 取 $f(x, y) = 2x - y + 2$.

$$f'_x = 2, \quad f'_y = -1, \quad dz = 2dx - dy.]$$

5. 连续可偏导 (= 偏导数连续)

判断 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 是否连续可偏导 (非常实用!).

Step 1. 用定义法求 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$. (特点.)

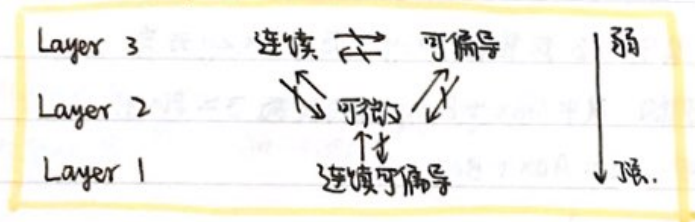
Step 2. 用公式法求 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$. (泛点.)

Step 3. 验证 ① $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_x(x, y) \stackrel{?}{=} f'_x(x_0, y_0)$.

② $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_y(x, y) \stackrel{?}{=} f'_y(x_0, y_0)$.

若①、②均成立, $\Rightarrow f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数连续, 即在 (x_0, y_0) 连续可偏导.

★ 重要关系图: (结合极限连续、可导性构造).



“下面可推上面, 上面推不出下面. Layer 3 同层不可推, 上面不满足, 下面必不满足.”

例2: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 研究 ① 连续? ② 可偏导? ③ 可微?

$$① \quad 0 \leq |f(x, y)| = |x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} |x| = 0. \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \quad \therefore f(x, y) \text{ 在 } (0, 0) \text{ 点连续.}$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x|x|} = 0 \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0. \quad \text{同理 } f'_y(0, 0) = 0.$$

$\therefore f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可偏导.

$$③ \quad \Delta z = f(x, y) - f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - A(x-0) - B(y-0)}{\rho} = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ 不存在.}$$

Campus

$\Rightarrow f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

二. 计算

1. 链式求导法则.

$$\text{如 } z = f(u, v, w), \quad u = u(y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x).$$

Step 1. 还原自变量, 再连线.

$$\Rightarrow z \leftarrow \begin{matrix} u & x \\ v & \swarrow \searrow \\ w & y \end{matrix}$$

Step 2. 看 z 通过谁能连到 x . 不可多, 不可漏.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

△注意: z 无论对谁求导, 求几阶导, 求导后的新函数与原来的函数 z 有相同复合结构!

$$f' \leftarrow \begin{matrix} u & x \\ v & \swarrow \searrow \\ w & y \end{matrix}$$

例3: 设 $z = f(e^x \cos y, x^2 + y^2)$, f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

△保持清楚! 最好!

△书写规范. $z = f(\underline{\quad}, \underline{\quad})$. (看成第1个位置, 第2个位置)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \underline{\quad} + f'_2 \cdot \underline{\quad}$$

$$f = z \leftarrow \begin{matrix} u & x \\ v & \swarrow \searrow \\ w & y \end{matrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot e^x \cos y + f'_2 \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial(f'_1 \cdot e^x \cos y)}{\partial y} + \frac{\partial(f'_2 \cdot 2x)}{\partial y}$$

乘法法则.

$$I_1 = \frac{\partial f'_1}{\partial y} \cdot e^x \cos y + f'_1 \cdot e^x (-\sin y) = (f''_{11} \cdot e^x (-\sin y) + f''_{12} \cdot 2x) e^x \cos y + f'_1 \cdot e^x (-\sin y)$$

$$I_2 = 2x \cdot \frac{\partial f'_2}{\partial y} = 2x (f''_{21} \cdot e^x (-\sin y) + f''_{22} \cdot 2y)$$

∵ $z = f(x, y)$ 二阶连续可偏导, ∴ $f''_{xy} = f''_{yx}$.

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} (-e^x \sin y) + f''_{12} (2y e^x \cos y - 2x e^x \sin y) + 4xy f''_{22} - f'_1 \cdot e^x (-\sin y)$$

例4: 设 $f(u, v)$ 二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$, $f'_1(1, 1) = 0$, $f'_2(1, 1) = 0$. $z = f(x+y, f(x, y))$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)}$.→ 与 f 一样的复合结构

$$z = f(\underbrace{x+y}_1, \underbrace{f(x, y)}_2) \leftarrow \begin{matrix} u & x \\ v & \swarrow \searrow \\ w & y \end{matrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x+y, f(x, y)) + f'_2(x+y, f(x, y)) \cdot f'_1(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = [f''_{11}(x+y, f(x, y)) + f''_{12}(x+y, f(x, y)) \cdot f'_1(x, y)]$$

$$+ (f''_{21}(x+y, f(x, y)) \cdot 1 + f''_{22}(x+y, f(x, y)) \cdot f'_2(x, y)) \cdot f'_1(x, y) + f'_2(x+y, f(x, y)) \cdot f''_{12}(x, y) \cdot 1$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)} = f''_{11}(2, 2) + f'_2(2, 2) \cdot f''_{12}(1, 1).$$

2. 隐函数存在定理.

(1) 设 $F(x, y) = 0$. 且 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有 - 阶连续偏导数. 且 $F(x_0, y_0) = 0$.

若 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 则存在 $y = y(x)$. 且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$. 其中 F'_x, F'_y 是 $F(x, y)$ 对 x, y 的偏导.

(2) 设 $F(x, y, z) = 0$. 且 $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内有连续的 - 阶偏导数. 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. 若 $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 则存在 $z = z(x, y)$.

且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$. 其中 F'_x, F'_y, F'_z 是 $F(x, y, z)$ 的偏导数.

公式法

直接法: 等式两边同时对某一同变数求导 (注意将其他同变数看做常数), 再解方程.

从而得到隐函数的偏导数.

补充 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 的计算有 2 种方法.

(1) 先求偏导数 $f'_x(x, y)$, 再将 (x_0, y_0) 代入, 得到 $f'_x(x_0, y_0)$.

(2) 先将 $y = y_0$ 代入 $f(x, y)$ 得到一元函数 $f(x, y_0)$. 对 x 求导得 $\frac{df(x, y_0)}{dx}$.

再将 $x = x_0$ 代入得到 $f'_x(x_0, y_0)$.

3. 高阶偏导数.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y). \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y). \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

4. 二元函数 $z = f(x, y)$ 的极值.

(1) 解方程组 $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$. 求得 - 切实数解. 即可求得 - 切驻点.

(2) 对于每一个驻点 (x_0, y_0) . 求出二阶偏导数的值 A, B 和 C .

(3) 定出 $AC - B^2$ 的符号. 判定 $f(x_0, y_0)$ 是否有极值. 是极大或极小值.

1° $AC - B^2 > 0$. 有极值. 当 $A < 0$. 时有极大值. 当 $A > 0$ 时有极小值.

2° $AC - B^2 < 0$. 没有极值.

3° $AC - B^2 = 0$ 时, 可能有或没有. 另作讨论.

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A. \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B. \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

最值点 (驻点 + 边界点 (固定一条边界 $\rightarrow$ 驻点 + 端点)).

<锦题><核心笔记><第四章·多元函数微分学>

1. $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数 $y = y(x)$.

$$1. \frac{dy}{dx} = f'_1 + f'_2 \cdot \frac{dy}{dx} + f'_3 \cdot \frac{dz}{dx}.$$

 $z = z(x)$. 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$. $e^{xy} - y = 0 \Rightarrow e^{xy}(y + x \frac{dy}{dx}) - \frac{dy}{dx} = 0$ 所确定. 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}. \quad \text{同理} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{xz-x}.$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{y^2}{1-xy} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{z}{xz-x}.$$

2. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x+y+z)$ 2. (1) $2x - \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(1 + \frac{\partial z}{\partial x}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}$ 所确定的函数. 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$ 时.

$$2y - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(1 + \frac{\partial z}{\partial y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'}$$

(1) 求 dz

$$\therefore dz = \frac{1}{\varphi' + 1} [(2x - \varphi')dx + (2y - \varphi')dy]$$

(2) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} (\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y})$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$(2) u(x, y) = \frac{2}{1 + \varphi'}.$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -2 \cdot \frac{1}{(1 + \varphi')^2} \cdot \varphi'' \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}).$$

$$= -2 \frac{\varphi''(1 + 2x)}{(\varphi' + 1)^3}.$$

 φ'' 与 φ 有相同结构!3. 设 $u = f(x, y, z)$. $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$. $y = \sin x$.

$$3. \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

其中 f, φ 都具有 1 阶连续偏导数. 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$. $\varphi(x^2, e^y, z) = 0 \Rightarrow$ 偏导数都为 0.求 $\frac{du}{dx}$.

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cdot \cos x + \varphi'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + e^y \cos x \varphi'_2).$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \cos x \varphi'_2)$$

4. $f(x+y, y+z, z+x) = 0$. 求 dz .4. 同上. 对 x 求偏导. $f'_1 + f'_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + f'_3 (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_1 + f'_3}{f'_2 + f'_3}$$

$$\text{对 } y \text{ 求偏导.} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_1 + f'_3}{f'_2 + f'_3}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{f'_2 + f'_3} [(f'_1 + f'_3)dx + (f'_1 + f'_3)dy]$$

<锦题><高分指南><第四章·多元函数微分学>

1. 讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

$$1. \text{ 令 } y = kx. \quad I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^2 + k^2 x^2} = 0$$

$$\text{令 } y = kx^2. \quad I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^2 + kx^4} = \frac{k}{1+k^2}.$$

 $\therefore$ 原式的极限不存在.

2. 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3. 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$.

4. 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$.

5. 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)(x^2-y^2)$.

6. 设 $y=y(x)$, $z=z(x)$. 是由 $z=x f(x+y)$

和 $F(x, y, z)=0$ 所确定的函数. 其中 f 具有一阶连续偏导数. F 具有一阶连续偏导数.

求 $\frac{dz}{dx}$.

7. 设 $\begin{cases} x = -u^2 + v + z \\ y = u + vz \end{cases}$. 求 $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{1} = 0$

3. 令 $y=kx$. ($k \neq 1$).

$I = \frac{1+k}{1-k}$. 它随 k 值变化而变化. 极限不存在.

4. 令 $y = \arctan(kx^2-x)$. ($k \neq 0$)

$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \cdot \arctan(kx^2-x))}{x+kx^2-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(kx^2-x)}{kx^2} = -\frac{1}{k}$. 极限不存在.

5. $0 \leq |(x^2-y^2) \ln(x^2+y^2)| \leq (x^2+y^2) |\ln(x^2+y^2)|$

而 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$. $\therefore e^0 = 1$.

6. 分别在两等式两边对 x 求导.

$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f + x(1 + \frac{dy}{dx})f' \\ F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x f' \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f + x f' \\ F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = -F_x \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{F_y + x f' F_z} [(f + x f') F_y - x f' F_x]$

7. 对 $\begin{cases} x = -u^2 + v + z \\ y = u + vz \end{cases}$ 在两边求全微分

Δ 微分法. $y = u + vz$

$\begin{cases} dx = -2u du + dv + dz \\ dy = du + z dv + v dz \end{cases} \rightarrow$ 消 dv .

$\Rightarrow du = \frac{1}{2uz+1} (-z dx + (z-v) dz + dy)$

$dv = \frac{1}{2uz+1} (2u dy + dx - (1+2uv) dz)$.

$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z}{2uz+1}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}$.

8. 函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f(xg(y), y) = x + g(y)$

确定, 其中 $g(y)$ 可微, 且 $g'(y) \neq 0$. 则 $\frac{\partial f}{\partial u \partial v}$

= _____.

8. 设 $u = xg(y)$. $v = y$.

$f(u, v) = \frac{u}{g(v)} + g(v)$

$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{g(v)}$

$\frac{\partial f}{\partial u \partial v} = -\frac{g'(v)}{g^2(v)}$.

9. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定.

则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\quad}$.

9. 法一: 公式法. 设 $F(x, y, z) = z - e^{2x-3z} - 2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2}{1+3e^{2x-3z}}$$

$$\therefore 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

法二: 微分法. 对 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 两边同时微分

$$dz = d(e^{2x-3z} + 2y) = e^{2x-3z} d(2x-3z) + 2dy$$

$$= e^{2x-3z} (2dx - 3dz) + 2dy.$$

$$\Rightarrow dz = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}} dx + \frac{2}{1+3e^{2x-3z}} dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}} \therefore 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

10. 若从 $F(x, y, z) = 0$ 可分解出 $x = f(x, y)$, $y = g(z, x)$.

$z = h(x, y)$, 则下列各式成立的个数为

(1) $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$.

(2) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$ (3) $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = 1$

(4) $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = 1$ (5) $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$.

10. 求微分

$$dF(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) \cdot \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) = -1$$

$\therefore$ (1) (4) (5) 正确.

11. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$

11. $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+y)^2 - 2xy}{e^{x+y}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} - \frac{2x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right)$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ 指数函数 > 幂函数

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^u} \quad \text{令 } u = x+y \quad = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^u} = 0$$

12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

12. $I = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{xy}{x+y}}$

若 (x, y) 沿 $y=0$ 趋于 $(0,0)$, $I = \lim e^0 = 1$.

若 (x, y) 沿 $y = \frac{x}{x-1}$ 趋于 $(0,0)$, $I = e^1 = e$.

$\therefore$ 极限不存在

13. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{\frac{1}{x^2}}}{ye^{\frac{1}{x^2}} + 1}, & x \neq 0, y \text{ 任意} \\ 0, & x = 0, y \text{ 任意} \end{cases}$

讨论 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续.

13. (x, y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$, $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$.

(x, y) 沿 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ 趋于 $(0,0)$.

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad \text{故 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ 不存在}$$

$\therefore f(x, y)$ 不连续

No.

* 遇到 $f(x+y, y+z, z+x)=0$.可以死求导, 偏导=0. $\Rightarrow$ 基本!

Date

也可以用公式法求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. (前提: 单个包含关系! 如还有 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ 或 $x(x, z)$.) 不能用!

(可以简化步骤).

可以构造 z 的函数关系.
此题死求导太麻烦!14. 设函数 F 具有一阶连续偏导数, $z=(x, y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0$ 所确定, $xy \neq 0, yF_2' + xF_1' \neq 0$. 求 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1'}{F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1'}{F_2'}$$

(此时忽略 z 与 x 函数关系)

$$F_1' = F_1' - \frac{z}{x} F_2', \quad F_2' = -\frac{z}{y} F_1' + F_2'$$

$$F_2' = -\frac{z}{y} F_1' + F_2'$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x(-\frac{F_1'}{F_2'}) + y(-\frac{F_1'}{F_2'}) = z - xy.$$

15. $x^y = y^x$. 求 $\frac{dy}{dx}$.15. $F(x, y) = x^y - y^x$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x \ln y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \ln x - xy^{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}.$$

但 $y \ln x = x \ln y$. 再求导?方法不可行. $\because$ 不知道 $x^y > 0, y^x > 0$.16. 求函数 $y = e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值16. $f(x, y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$

$$\begin{cases} f_x' = e^{2x} \cdot 2(x+y^2+2y) + e^{2x} \cdot 1 = 0 \\ f_y' = e^{2x}(2y+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1. \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{点}(\frac{1}{2}, -1)$$

$$f_{xx}'' = 2e^{2x} \cdot (2x+2y^2+4y+3), \quad A=4e$$

$$f_{xy}'' = e^{2x}(4y+4), \quad B=0$$

$$f_{yy}'' = 2e^{2x}, \quad C=2e$$

$$AC-B^2 = 8e^2 > 0, A > 0. \therefore \text{极小值 } -\frac{1}{2}e.$$

线性代数 Part

<第一章> 行列式

一、定义：取自不同行不同列元素乘积的代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

逆序数：一个排列中，较大的数排在较小的数前面，称两个数构成逆序。

一个排列的逆序总数称为逆序数 τ 。

二、性质：① 交换行与列，行列式的值不变 (行列等价)

② 交换两行(列)，行列式变号 两行(列)相同 行列式值为0。

③ 某行(列)有公倍数 k ，可以将 k 提出 倍乘 $\rightarrow$ 某一行(列)全为0，行列式为0。
 $\rightarrow$ 某两行(列)对应元素成比例，行列式为0。

④ 某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变。倍加(可逆性)

三、展开定理。 $\Rightarrow$ 用处：把“零”多的行(列)展开。

定理：余子式 M_{ij} (划掉行列 $\rightarrow$ 余子式) $\Rightarrow$ 自身无正负号，But 展开成余子式，要加系数的正负。

$$\text{代数余子式 } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad \text{展开为代数余子式，全是加号，不分正负号。}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

推论：行列式的一行(或列)所有元素乘以另一行(或列)对应元素的代数余子式再求和，结果为零。

$$\text{即 } \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k). \quad \text{不同行}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ji}A_{jk} = a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = 0 \quad (i \neq k). \quad \text{不同列}$$

$\Rightarrow$ 由于第二行元素的代数余子式在计算时会划掉第二行的元素，因此第二行元素的代数余子式是和第二行元素的取值无关的。改变第二行元素的取值不影响行列式展开的值。

$$\Rightarrow \text{求 } x_1A_{21} + x_2A_{22} + x_3A_{23} + x_4A_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

如果要求某行/列的代数余子式的线性组合，则将该行/列所有元素均改为对应系数即可。

四、行列式计算

1. 熟记. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

变形: 1° 某行加某行和为常数 $\Rightarrow$ 范德蒙式. 变为 $1, 1, \dots, 1$.

2° 乘法为元素 $\Rightarrow$ 范德蒙式. 将第 1 个元素变为 1.

2. 特殊的按位展开式.

若 A, B 分别为 m 阶、 n 阶矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

$$\text{主对角线} \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

$$\text{副对角线} \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & a_{3n-2} & & \\ a_{nn-1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & a_{3n-2} & & \\ a_{nn-1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{nn-1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

3. 克莱姆法则. $Ax = b, D = |A|$.

若 n 元线性方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

则方程组有唯一解. 且解可表示为 $x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \dots, n$.

其中 D_j 是将 D 中第 j 列用常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 替换得到的 n 阶行列式.

$$\text{即 } D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$D \neq 0 \Rightarrow$ 有唯一解.

$D = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{无解} \\ \text{无穷解} \end{cases}$

4. 高斯消元法

不改变解的前提下, 将一般线性方程组化为“阶梯形”线性方程组求解.

定理: ① 齐次线性方程组中, 若方程个数 $<$ 未知量个数 n , 则必有非零解.

② n 元齐次线性方程组只有零解的充要条件: 系数行列式不为零.

① 对于四阶及以上的行列式，一般通过展开定理化为低阶的行列式进行计算。

当行列式某行/列只有一个或两个非零元时，直接使用展开定理即可。

如果不存在这样的行/列，则可利用行列式的性质，通过行和列之间的变换

将某行/列人为地“制造”出零后再进行展开。

⇒ 基本思路：“找1，化0，展开”。

注意行列式中元素，若各行(列)相加之和一定，则可提公因式。

② 三角化。

① “爪型”行列式 $|K| \xrightarrow{\text{三角化}} |\Delta| \text{ or } |N|$

“斜爪满爪” (将第1...n列的k倍全部加到第1列，将第1列除第1个，其余变为0)。

② “对角线型”行列式 $|\diagdown|$

其实质是由“秩为1的矩阵” $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix}$ 对角线元素变化而来 $\begin{vmatrix} x-b & x & x \\ x & x-b & x \\ x & x & x-b \end{vmatrix}$

1° 若行列式各行/列的和一样，则将所有行/列加到第一行/列，用公倍数提取

2° 利用各行(列)的比例关系将其中一行的若干倍加到其他行(列)。→ eg. 将第一行的-1倍加到其他行。

→ 化为“爪型”行列式，再三角化。(比较通用!)

③ 递推公式。

当行列式某一行(列)只有一个或两个非零元时，可以考虑将行列式展开。

将行列式展开的作用除了降阶以外，还可以得到递推公式。得到 D_{n-1} 或 D_{n-2} 表达式

得到 D_{n-1} 或 D_{n-2} 表达式。→ 找规律 (注意行列式展开降阶的同时，行列式的角标也在变！小心正负号！)

得到 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 的表达式。→ 用数学归纳法，假设 $n=k, n=k-1$ 时成立。

证明：用公式代入 $n=k+1$ 也成立，证毕。

五、行列式与其他章节的联系

1. A, B 为 n 阶方阵， $|A| = |A^T|$ ， $|kA| = k^n |A|$ ， $|AB| = |A||B| = |B||A|$ 。

一般地 $|A+B| \neq |A|+|B|$ ， $AB \neq BA$ 。

2. 当方阵 A 可逆时， $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 。

3. 设 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。

$AA^* = A^*A = |A|E$ 。

4. n 阶矩阵 A 可逆的充要条件: $|A| \neq 0$.

5. 矩阵 A 的子式: 任意 A 的 k 行 k 列所形成的 k 阶行列式称为 k 阶子式.

矩阵 A 的秩: 最高阶非零子式的阶数.

④ 当抽象行列式是依照行同重或列同重的行式给出时往往利用行列式的基本性质进行变形.

⑤ 如果给出了矩阵方程要计算某矩阵的行列式, 一般通过矩阵的运算法则

提出需要计算的行列式矩阵, 再利用矩阵相乘的行列式进行计算 (对矩阵方程两端取行列式).

$$\text{单位矩阵 } E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - E = (A + E)(A - E)$$

当矩阵 A 可逆时, 利用 $E = AA^{-1} = A^{-1}A$ 是常用的技巧.

<错题> <核心笔记> 第一章·行列式

1. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n \times n}$

1. 按第一列展开 (注意正负号—展开)
(看不满就把元素写上去再列阵!)

$$D_n = -D_{n-2}$$

$$\because D_1 = 0, D_2 = -1$$

$$\therefore \text{当 } n=2k \text{ 时, } D_{2k} = -D_{2k-2} = \dots = (-1)^{k-1} D_2 = (-1)^k$$

$$\text{当 } n=2k+1 \text{ 时, } D_{2k+1} = -D_{2k-1} = \dots = (-1)^k D_1 = 0$$

2. 证明: $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & & & \\ 1 & 2a & a^2 & & \\ & 1 & 2a & a^2 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2a & a^2 \\ & & & & 1 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n}$

2. 按第一行展开 (展开时注意正负号)

$$D_n = 2a D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

$$\text{易验证 } D_1 = 2a, D_2 = 3a^2$$

用数学归纳法证明

假设当 $n=k$ 及 $n=k-1$ 时等式成立, 即

$$D_k = (k+1)a^k, D_{k-1} = k a^{k-1}$$

$$\text{则 } D_{k+1} = 2a D_k - a^2 D_{k-1} = 2a(k+1)a^k - a^2 k a^{k-1}$$

$$= (k+2)a^{k+1} \therefore D_n = (n+1)a^n \text{ 对所有正整数 } n \text{ 成立}$$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 且矩

3. 先化简 $B(A-E) = 2E \Rightarrow B(A-E) = 2E$

阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{\quad}$

两端同行列式: $|B||A-E| = |2E|$

$$|A-E| = 2, |2E| = 4 \therefore |B| = 2$$

$$|2E| = 2, \times \text{ 是错的!}$$

4. 设 A, B 为 2 阶矩阵, 满足 $|A| = 3, |B| = 2$

4. 利用 $E = AA^{-1} = BB^{-1}$ 变形

$$|A^{-1} + B| = 2, \text{ 试计算 } |A + B^{-1}|$$

$$A + B^{-1} = E A + B^{-1} = B^{-1} B A + B^{-1} = B^{-1} (B A + E)$$

$$= B^{-1} (B A + A^{-1} A) = B^{-1} (B + A^{-1}) A$$

$$\therefore |A + B^{-1}| = |B^{-1}| |B + A^{-1}| |A| = 3$$

5. $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\quad}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + D_4 = (-a)^5 + D_4$

$$= \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a \end{vmatrix} + D_4 = (-a)^5 + D_4$$

$$\therefore D_5 = -a^5 + a^4 - a^3 + a^2 + 1 - a$$

或者从 D_2, D_3 找规律

6. 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

6. 从第 i 行提出 i 得.

$$= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n-1} (n-i) \prod_{i=1}^{n-2} (n-1-i) \cdots (2-1)$$

$$= n! (n-1)! (n-2)! \cdots 1!$$

7. 计算

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & & & \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & & \\ & \beta & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha+\beta & \alpha \\ & & & \alpha+\beta & \alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

7. 按第一行展开.

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$

$$\cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) = \beta^n. \quad (1)$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) = \alpha^2(D_{n-2} - \beta D_{n-3})$$

$$= \cdots = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) = \alpha^n. \quad (2)$$

两式相减得 $D_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $D_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$ ($\alpha \neq \beta$)

当 $\alpha = \beta$ 时, $D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^n$.

$$D_n = \alpha^n + \alpha D_{n-1} = \alpha^n + \alpha(\alpha^{n-1} + \alpha D_{n-2}) = 2\alpha^n + \alpha^2 D_{n-2}$$

$$\cdots = (n-1)\alpha^n + \alpha^{n-1} D_1 = (n+1)\alpha^n.$$

<错题> <高分指南·第五章·行列式>.

1. 已知 3 阶行列式 $|d_1, d_2, d_3| = 2$.

计算 $|d_2 + d_3, d_1 + d_3, d_1 + d_2|$.

1. 知道方法! (矩阵相乘分解).

$$(d_2 + d_3, d_1 + d_3, d_1 + d_2) = (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |d_2 + d_3, d_1 + d_3, d_1 + d_2|$$

$$= |d_1, d_2, d_3| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

2. 设 4 阶矩阵 $A = (d, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 2. $|A+B| = |A| + |B| = 5$ X.

且 $|A| = 4$, $|B| = 1$. 求 $|A+B|$.

$$|A+B| = |(d, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + (\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)|$$

$$\text{矩阵相加} \rightarrow |(d+\beta, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 2\gamma_3)| = 8|(d+\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)|$$

$$\text{行列式性质} \rightarrow = 8|d, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| + 8|\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 8 \times 4 + 8 \times 1$$

$$= 40.$$

3. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

3. 自下而上, 各行减去上一行 (等差数列).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{下行}-\text{上行}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & -1 & -y & z+1 \\ 1 & -z & x+3 & y \\ y-2 & x+1 & 0 & z+3 \end{vmatrix}$ 的代数和

4. 想到 $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$.

$$A_{11} \cdot a_{21} + A_{12} \cdot a_{22} + A_{13} \cdot a_{23} + A_{14} \cdot a_{24} = 0$$

式 $A_{11} = -9$, $A_{12} = 3$, $A_{13} = -1$, $A_{14} = 3$. 求 x, y, z .

$$\Rightarrow -9x - 3 - 1 \cdot (-y) + 3(z+1) = 0 \Rightarrow -9x + y + 3z = 0.$$

$$\text{同理第3行} \Rightarrow -3z - x + 3y - 12 = 0$$

$$\text{同理第4行} \Rightarrow -9y + 3x + 3z + 30 = 0.$$

$$\Rightarrow x=0, y=3, z=-1.$$

5. 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 在展开式中常数项为

5. 4行减3行 $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & x \end{vmatrix}$

A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -x \cdot (-x-x) + x \cdot (x+x-x^3)$$

无常数项. (展开后).

6. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = m(b-a)(c-a)(b-c),$

6. 展开. $D = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 \end{vmatrix}$

则 m 为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.

$$= 2 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = 4 [(b^2-a^2)(c-a) - (b-a)(c^2-a^2)]$$

$$= 4(b-a)(c-a)(b-c). \therefore m=4.$$

7. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根, 则行

7. $x^3 + px + q = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x-x_1)(x^2 - (x_2+x_3)x + x_2x_3)$

列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + ax - x_1x_2x_3.$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=0, x_1x_2x_3=-q.$$

A. 1. B. 2. C. -1 D. 0.

$$\text{原行列式} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

$$= -p(x_1+x_2+x_3) - 3q - 3(-q) = 0.$$

<第二章> 矩阵.

一、矩阵的概念及常见矩阵.

1. 概念 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 是 m 行 n 列数表, 当 $n=m$ 时, A 为 n 阶方阵

A, B 行、列数相等 $\Rightarrow$ 同型矩阵.

A, B 同型且对应元素相等 $\Rightarrow A$ 与 B 相等 (记 $A=B$)

2. 常见矩阵. 零矩阵 $O = (\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$. 单位矩阵 $E_n / I_n (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ 对称矩阵 $A^T = A (\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix})$

反对称矩阵 $A^T = -A (\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix})$

上(下)三角矩阵 $(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}) / (\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & b \end{smallmatrix})$

正交矩阵 $AA^T = A^T A = E$.

(二、运算内容及运算法则.

1. 运算内容: 1° 加法 (条件: 同型且对应元素相加) $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = C_{ij}$.

2° 数乘. $kA = (ka_{ij})$. (每个 a_{ij} 均乘 nk)

3° 乘法. $A = (a_{ij})_{m \times n}$. $B = (b_{ij})_{n \times k}$ (A 的列数 = B 的行数)

$(\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}) \times (\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix})$ 行 $\times$ 列 $C = A \cdot B = (C_{ij})_{m \times k} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

若 A 为方阵, 定义 A^n 为矩阵 A 的 n 次幂.

4° 转置. $B = A^T$. 把矩阵的行换为对应的列.

2. 运算法则. 1° 加法与数乘.

$A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$, $K(A+B)=(KA)+KB$.

2° 转置.

$(A+B)^T = A^T + B^T$, $(kA)^T = kA^T$, $(AB)^T = B^T A^T$.

3° 乘法.

成立的法则: $(AB)C = A(BC)$. $C(A+B) = CA + CB$. $K(AB) = (KA)B$.

不成立的法则: ① 交换律不成立. $AB \neq BA$.

特别地, 若 $AB=BA \Rightarrow$ 称 A, B 可交换 $\Rightarrow$ 才可用 $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.

② 消去律不成立. $AB=0 \Rightarrow A=0$ 或 $B=0$.

$AB=AC$, 且 $A \neq 0 \Rightarrow B=C$.

$A(B-C)=0 \Rightarrow A=0$ 或 $B=C$.

4° 方幂. $A^n A^m = A^{n+m}$, $(A^m)^n = A^{mn}$.

[矩阵运算 I]

① 求幂 A^n .- 列 $\times$ 行 = 方阵 $\alpha \beta^T$ - 行 $\times$ 列 = 数 $\alpha^T \beta$ ① A 为秩为 1 的矩阵 (即各行/列元素成比例). $\rightarrow$ 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积, 再叠推. (选定某行为 β^T , 再确定该行与其他行比例系数 α).

$$\rightarrow A = \alpha \beta^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{利用矩阵乘法结合律 } A^2 = [\alpha \beta^T] [\alpha \beta^T] = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = \alpha \cdot A$$

这个数 $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = \text{tr}(A)$. 即 A 的主对角线元素之和.

$$\rightarrow A^k = (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^{k-1} \cdot A.$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^n = 0. (n \geq 3).$$

$$\text{对于主对角线元素相等的上(下)三角形矩阵, 形式如 } A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ a & k & 0 \\ c & b & k \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \text{将矩阵分解为 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} + kE = B + kE$$

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$\text{再用二项式定理展开. } (a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^0$$

$$\rightarrow A^n = (B + kE)^n = C_n^0 B^0 \cdot (kE)^n + C_n^1 B^1 \cdot (kE)^{n-1} + C_n^2 B^2 \cdot (kE)^{n-2} + \dots$$

③ 若 A 为分块矩阵. $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 则先分块, 再用 ①、② 方法计算.

<补充> 1. 分块矩阵.

定义: 用水平和垂直的直线将矩阵 A 分成很多小块, 每一块称之为 A 的一个子矩阵.则称 A 为以这些子矩阵为元素的分块矩阵.

分块矩阵的运算同矩阵运算: 分两步走 ① 把子矩阵看成数字, 用矩阵公式算

② 子矩阵之间的运算.

$$\text{特别地, } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & CD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & C^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{若 } A_{m \times n} = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n), \quad d_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots d_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } B_{k \times m} A_{m \times n} = B_{k \times m} \times (d_1, d_2, \dots, d_n) = (B d_1, B d_2, \dots, B d_n)$$

$$\text{则 } A_{m \times n} B_{n \times k} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = (b_{11}d_1 + b_{21}d_2 + \dots + b_{n1}d_n, \dots, b_{1k}d_1 + \dots + b_{nk}d_n)$$

↓
列向量

2. 方阵的行列式.

设 A, B 为 n 阶方阵. 且 k 为实数. 则有 $|A| = |A^T|$

$$|kA| = k^n |A|$$

$$|AB| = |BA| = |B||A|$$

三、逆矩阵.

1. 逆矩阵的概念. 条件 ① n 阶方阵 A . ② $AB = BA = E$.

⇒ 则 A 为可逆矩阵. $B = A^{-1}$.

仅从 $AB = E$ 不能断定 B 为矩阵 A 的逆矩阵

2. 基本性质. ① 若 A 可逆, 则 A^{-1} 唯一.

② 若 A 可逆, 则 A^{-1}, A^T 均可逆. 且 $(A^{-1})^{-1} = A, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

③ 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 可逆. 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $(AB)^T = B^T A^T$.

推论: $(A_1 A_2 \dots A_m)^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \dots A_1^{-1}, (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

④ 若 A 可逆, 且 $k \neq 0$, 则 kA 可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$.

⑤ 若 A 可逆. 则 $|A| |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$. 每矩阵可逆的必要条件是 $|A| \neq 0$.

⑥ 若 A, B 均可逆, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 均可逆.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

四、伴随矩阵.

1. 定义: A_{ij} 为 n 阶矩阵的代数余子式. 伴随矩阵 A^* .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

注意: (1) 在代数余子式的排列顺序里行和列相反的. (2) A_{ij} 是有正负号的. (计算时)

$$(3) 2 \text{ 阶矩阵 } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

"主对角, 副变号".

2. 公式.

$$1. \boxed{AA^* = A^*A = |A|E} \Rightarrow (\text{无条件}).$$

特别地, 当 $|A| \neq 0$ 时, $\boxed{A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*} \Rightarrow \text{条件: } A \text{ 可逆}.$

2. 设 A 为 n 阶方阵, 当 $AB = E$ 或 $BA = E$ 时, 有 $B^{-1} = A$ 或 $A^{-1} = B$.

四 计算逆矩阵.

① 用 A^* (2阶).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (ad-bc \neq 0)$$

$$\text{求 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

主对角, 副对角 $\times ad-bc$.

② 初等行变换 (2阶以上) $\Rightarrow$ 只能做行变换!

$$(A : E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E : A^{-1})$$

③ 性质: $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ (若 $k \neq 0$ 且 A 可逆).

若 A_1, A_2, A_3 均可逆

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} (A, B \text{ 均可逆}).$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_2^{-1} & A_3^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} (A, B \text{ 均可逆}).$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & B_2^{-1} & B_3^{-1} \end{pmatrix}$$

用于抽象

④ 简化定义 若 $A_{n \times n}$ 为方阵. 只要知道 $AB = E$ 或 $BA = E$ 二者之一.

$$\Rightarrow B = A^{-1}.$$

⑤ 当题目中给出了矩阵方程, 要证明某矩阵可逆或计算其逆矩阵时. $\triangle$ 左行右列, 位置要小心!

一般的思路是利用矩阵的运算法则对等式进行变形, 凑出该矩阵与另一矩阵的乘积为 E .
为了简化思路, 却先将乘积凑成 KE , 再除以系数即可.

(技巧: 看到 A^{-1} , 就左乘/右乘 A). (技巧2: 看到 A^* , (若可逆的条件下) $A^* = |A| \cdot A^{-1}$, 化简!)

(注意: 当 $(A-E)B = 2A$, 不是求 A^{-1} 凑出 E , 而是 $2A \rightarrow 2E + 2E$, 右边凑出 E !)

⑥ 题目中需要计算两矩阵之和的逆矩阵或行列式时.

可以利用单位矩阵变形的技巧. $B = BE = EB$. $E = AA^{-1} = BB^{-1}$.

五 计算伴随矩阵.

$$① \text{ 若 } |A| \neq 0. \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \Rightarrow A^* = |A| \cdot A^{-1}.$$

(90% 的题目都可以这么做!)

注: n 阶伴随矩阵 A^* , 可以用定义计算, 但要注意行列交换位置!

② 若 $|A|=0 \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{无条件成立.} \\ 10\% \text{ 的题目要这么做!} \end{array} \right\}$

或 $A^*A = A^*A = |A|E$

③ 求解矩阵方程.

① 先对矩阵方程进行变形化简.

② $AX=B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$XA=B \Rightarrow X=BA^{-1}$

$AXB=C \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

③ 先计算相应的逆矩阵,再算乘法.

$(A^T)^* = (A^*)^T, (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

$\Delta A^{-1}, A^*, A^T$ 可交换运算顺序.

$\otimes A^*, A^{-1}, A^T$ 三种运算, 小坑: (假设 A, B 均可逆)

① $A^T \quad |A^T| = |A| \quad (KA)^T = K A^T \quad (A^T)^T = A \quad (AB)^T = B^T A^T$

② $A^{-1} \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} \quad (KA)^{-1} = K^{-1} \cdot A^{-1} \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

③ $A^* \quad |A^*| = |A|^{n-1} \quad (KA)^* = K^{n-1} \cdot A^* \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} \cdot A \quad (AB)^* = B^* A^*$

$\uparrow$ 只要 A 为 n 阶方阵, 即成立.

五. 初等矩阵与初等变换.

1. 定义: <初等行列>变换: ① 交换矩阵的两行(列)

互换初等阵

② 将一个非零数 k 乘到矩阵的某一行(列)

倍乘初等阵

③ 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上.

倍加初等阵.

<初等矩阵>: 对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵.

① E_{ij} : 交换单位矩阵的第 i 行和第 j 行 or 第 i 列和第 j 列.

② $E_{i(k)}$: 将一个非零数 k 乘到单位矩阵的第 i 行 or 第 i 列.

③ $E_{ij(k)}$: 将单位矩阵的第 i 行的 k 倍加到第 j 行.

行 $i \rightarrow j$ 行

or 将单位矩阵的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上.

列 $j \rightarrow i$ 列

2. 定理: (1) "左行右列"定理: 对矩阵 A 左乘一个初等矩阵, 等于对 A 作行变换.
对矩阵 A 右乘一个初等矩阵, 等于对 A 作列变换.

(2) 所有的初等矩阵都是可逆的.

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, (E_{ii}(k))^{-1} = E_{ii}(\frac{1}{k}), (E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k).$$

(3) 矩阵 A 可逆的充要条件是它能表示成有限个初等矩阵的乘积.

即 $A = P_1 P_2 \cdots P_m$. 其中 $P_1, P_2, \dots, P_m$ 均为初等矩阵.

可逆矩阵的本质: 单位矩阵经过有限次初等变换后得到的矩阵.

初等矩阵 P_i $P_i A$ 一次变换.
可逆矩阵 P $PA = P_1 P_2 \cdots P_m A$. m 次变换. $\rightarrow$ 推广的左行右列公式.

<补充> 1. 矩阵的等价

(1) 定义: 设矩阵 A, B 为同型矩阵, 如果矩阵 A 经过有限次初等变换后, 可以变成 B . 则称矩阵 A, B 等价, 记作 $A \cong B$.

$$\text{注: } 1) A \cong B \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} B$$

$$2) A \text{ 可逆} \Leftrightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_m E \Leftrightarrow A \cong E.$$

(2) 定理: 矩阵 A 与矩阵 B 等价的充要条件是存在可逆矩阵 P, Q .

$$\text{使得 } PAQ = B. \quad A \xrightarrow{\text{初}} B \Leftrightarrow \boxed{P_m \cdots P_1} A \boxed{Q_1 \cdots Q_r} = B.$$

2. 矩阵的秩.

(1) 子式: 任意矩阵 A 的任意 k 行 k 列所形成的 k 阶行列式. $\rightarrow k$ 阶子式. $\#$

子式的阶数不超过矩阵行数和列数的最小值.

(2) 矩阵的秩: 矩阵 A 最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩. $r(A)$.

注意: 1) 矩阵 A 中至少存在一个非零的 k 阶子式 $\Leftrightarrow r(A) \geq k$.

矩阵 A 中没有 $k+1$ 阶子式或所有 $k+1$ 阶子式全为零 $\Leftrightarrow r(A) \leq k$.

2) 零矩阵没有非零子式. $r(A) = 0$.

3) $A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) \geq 1$

4) 假设 $r(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ 中存在 } 1 \text{ 阶非零子式} \Leftrightarrow A \neq 0. & \text{非零矩阵} \\ A \text{ 中不存在 } 2 \text{ 阶非零子式} \Leftrightarrow \text{按行(列)成比例.} \end{cases}$

5) 若 A 为 n 阶矩阵: A 满秩 $\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

若 $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$.

3. 矩阵方程.

(I) $Ax = B$.

(II) $XA = B$

其中 $|A| \neq 0$. 解都存在且唯一.

(I) 的解法: 将 A 和 B 并列作矩阵 $(A|B)$. 进行初等行变换.

$(A|B) \xrightarrow{\text{行}} (E|X)$

(II) 的解法: 对两边转置为 (I) 的形式. 如 $A^T X^T = B^T$.

$(A^T|B^T) \xrightarrow{\text{行}} (E|X^T)$

$$\text{若 } A^3 = 0.$$

$$(E-A)(E+A+A^2) = E - A^3 = E.$$

$$(E+A)(E-A+A^2) = E - A^3 = E.$$

3次立方和/差

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

<错题> <核心笔记·第二章·矩阵> (多算算!) 先化简, 再计算 原则!

$$1. \text{求} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$1. (A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

△计算后将通矩阵代入检验一下 $AA^{-1} = E.$

2. 设 ξ 为 3 维向量, 满足 $\xi^T \xi = 1$, E 为 3 阶单位矩阵, 2. (2) $A^2 - 3A + 2E = 0$. 同时或 bE .

$$A = E + \xi \xi^T.$$

$$A^2 - 3A - 4E = -6E$$

(1) 证明: $A^2 - 3A + 2E = 0$. (2) 求 $(A+E)^{-1}$.

$$(A - 4E)(A + E) = -6E$$

$$\left(\frac{A-E}{6}\right)(A+E) = E.$$

$$\therefore (A+E)^{-1} = \frac{A-E}{6}.$$

3. 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$.

3. (1) 左乘 $A \Rightarrow AB - 2B - 4A = 0$.

(1) 证: 矩阵 $A - 2E$ 可逆

$$\Rightarrow (A - 2E)(B - 4E) = 8E \therefore (A - 2E)\left(\frac{B - 4E}{8}\right) = E$$

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

$$\therefore A - 2E \text{ 可逆. } (A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E).$$

$$(2) (A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$$

$$\therefore A = 8(B - 4E)^{-1} + 2E.$$

$$(B - 4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则

$$4. (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = (A^{-1}+B^{-1}) \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$\Delta E = A A^{-1}$$

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = \underline{\quad\quad\quad}.$$

$$E = B B^{-1}$$

$$= (E + B^{-1}A)A^{-1}$$

$$= ((B^{-1}B + B^{-1}A)A^{-1})^{-1}$$

$$= (B^{-1}(B+A)A^{-1})^{-1} = A(B+A)^{-1}B.$$

$$5. \text{设 } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \text{ 则 } (B^{-1})^* = \underline{\quad\quad\quad}.$$

$$5. |B^*| = 8 = |B|^{4-1} \therefore |B| = 2.$$

$$(B^{-1})^* = |B^{-1}|(B^{-1})^{-1} = |B|^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}B$$

$$B^{-1} = |B|^{-1}B^*, \text{ 再求出 } B. \Rightarrow (B^{-1})^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A \text{ 的所有代数余子式之和为 } \underline{\quad\quad\quad}.$$

$$6. |A| = 1. A^* = |A| \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore = 0.$$

7. 设 A, B 满足 $A^*BA = 2BA - 8E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B .

7. 左乘 $A \Rightarrow |A|BA = 2|A|BA - 8A \therefore |A| = -2$.

$$\therefore -BA = |A|BA - 4A \therefore (A+E)B = 4E$$

$$\therefore B = 4(A+E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Δ 化简! 至多只算一次逆矩阵!

Δ 技巧: A 可逆的条件下, 看到 A^* , 写成 $|A|A^{-1}$.

8. 设 $B = E - \xi\xi^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维列

8. (1) 充要性: 证明.

向量: 证明: (1) $B^2 = B$ 的充要条件是 $\xi^T\xi = 1$

必要性 $B^2 = (E - \xi\xi^T)^2 = E - 2\xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T$
 $= E - (2 - \xi^T\xi)\xi\xi^T = E - \xi\xi^T \therefore (\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T = 0$
 $\therefore \xi\xi^T = 1$.

(2) 当 $\xi\xi^T = 1$ 时 B 是不可逆的.

(2) 学会反证法: 当 $\xi\xi^T = 1$, $B = E - 1$.

假设 $|B| \neq 0$, B 可逆, $B^2 = B$, $B^{-1}B = E$.
 $\therefore B = E$ 与 $B = E - 1$ 矛盾, 故 $|B| = 0$.

9. 设 B 是 n 阶方阵, 且行列式 $|B| = 0$, 则 B 中 ()
 A. 必有一列元素全为零

9. $|B| = 0 \Leftrightarrow r(B) < n \Rightarrow B$ 的列向量组, 行向量组均线性相关.

B. 必有两列元素对应成比例

选 C.

C. 必有一列元素是其余列向量的线性组合

D. 任一行向量是其余列向量的线性组合

10. 设 B 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}BP$

10. $B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = (a_1, a_2, a_3)$, $Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3)$.

$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}BP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 选 B.

则 $Q^{-1}BQ = ()$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

<锦囊> <高分指南·第六章·矩阵>

$$(A-B)/(A-B) = E \therefore (A-B)^{-1} = A-B$$

1. 已知 \$A\$ 是 \$n\$ 阶对称矩阵, 且 \$A\$ 可逆. 如果 \$(A-B)^{-1} = E\$, 则 \$(E^T + (A^{-1}B^T)^T)(A(A^{-1}-B(A^{-1}))^{-1})\$ 可以化简为

$$\sqrt{(A \pm B)^T = A^T \pm B^T} \quad \text{又对称矩阵 } A^T = A$$

则 \$(E^T + (A^{-1}B^T)^T)(A(A^{-1}-B(A^{-1}))^{-1})\$ 可以化简为

$$= (E^T + (A^{-1}B^T)^T)(A(A^{-1}-B(A^{-1}))^{-1})$$

(A)(A+B) (B)(A-B) (C)\$A^2-B^2\$ (D)\$A(A+B)(A-B)\$

$$= (E + B(A^{-1})^T) \cdot A \cdot (A^{-1} - B)^{-1} = (E + B(A^{-1})^T) \cdot A \cdot (A^{-1} - B)^{-1}$$

$$= (E + B(A^{-1})^T) \cdot A \cdot (A^{-1} - B)^{-1} = (A + B)(A^{-1} - B)^{-1} \quad \text{选 D.}$$

2. \$A\$ 是 3 阶矩阵, \$|A|=5\$, \$B\$ 是 2 阶矩阵, \$|B|=-2\$. 则 \$| \begin{smallmatrix} 0 & A \\ 3B & 0 \end{smallmatrix} | = \underline{\hspace{2cm}}\$

$$| \begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix} | = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$= (-1)^{3 \times 2} \cdot |A^*| \cdot |3B|^1 = |A|^{3-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|B|} = -\frac{25}{18}$$

3. 设 \$A, B\$ 均为 \$n\$ 阶方阵, 下面说法正确的是

3. \$A\$ 可逆 \$\Leftrightarrow |A| \neq 0\$. \$A\$ 不可逆 \$\Leftrightarrow |A|=0\$.

(A) 若 \$A\$ 或 \$B\$ 可逆, 则 \$AB\$ 必可逆

\$B\$ 正确. \$|A|=0\$ or \$|B|=0 \Rightarrow |A||B|=0\$.

(B) 若 \$A\$ 或 \$B\$ 不可逆, 则 \$AB\$ 必不可逆

(C) 若 \$A, B\$ 均可逆, 则 \$A+B\$ 必可逆

(D) 若 \$A, B\$ 均不可逆, 则 \$A+B\$ 必不可逆

4. 设 \$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\$, \$A^T\$ 为转置, 则 \$|A^T A| = \underline{\hspace{2cm}}\$

4. \$A^T A\$ 为 \$3 \times 3\$ 阶. \$A\$ 为 \$2 \times 3\$ 阶.

$$r(A^T A) \leq r(A) \leq 2 \therefore |A^T A| = 0$$

5. 设 \$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\$, 则 \$A^{2010} - 3A^2 = \underline{\hspace{2cm}}\$

$$5. A^2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{2010} - 3A^2 = A^{2008+2} - 3A^2 = -2A^2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

6. \$A\$ 是 3 阶矩阵, \$\alpha\$ 是 3 维列向量, 使得 \$P = (A, A\alpha, A^2\alpha)\$ 是可逆矩阵, 并且 \$A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha\$. 则 \$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} P = \underline{\hspace{2cm}}\$

$$6. PB = AP = (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha)$$

$$= (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

设 3 阶矩阵 \$B\$, 使 \$A = PBP^{-1}\$, 则 \$|B+E| = \underline{\hspace{2cm}}\$

$$\therefore |B+E| = |PBP^{-1} + PP^{-1}| = |P(B+E)P^{-1}| = |P| |B+E| |P^{-1}|$$

A. 4. B. -4 C. 2 D. -2

$$= |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

7. 四阶矩阵 \$A, B\$, 满足 \$AB(A^{-1}) = B(A^{-1}) + 3E\$. 并且 \$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\$, 求 \$B\$ 的值.

$$7. AB = B + 3A \Rightarrow A^*AB = A^*(B + 3A)$$

$$\Rightarrow |A|B = A^*B + 3|A|. \quad |A^*| = 8 = |A|^{-4} \Rightarrow |A| = 2$$

$$\therefore B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

8. 设 \$A, B, C\$ 是 \$n\$ 阶矩阵, \$A\$ 可逆, \$H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\$,

$$8. |G| = 1. \quad HG = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{pmatrix}$$

\$G = \begin{pmatrix} E & -A^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix}\$, 则 \$|H| = \underline{\hspace{2cm}}\$

A. \$|A||B - DA^{-1}C|\$ B. \$|A||B|\$ C. \$|A||B| - |D||C|\$

$$|HG| = |H||G| = |H| = |A||B - DA^{-1}C|$$

9. \$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}\$, \$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\$, \$r(A+B) = 2\$, 则 \$t = \underline{\hspace{2cm}}\$

$$9. r(A+B) = r(A(E+B)) \therefore E+B \text{ 可逆.}$$

$$\therefore r(B) = 2. \quad |A| = 0 \Rightarrow t = 9$$

<第三章> <向量>

一、向量的线性相关与线性无关.

向量是特殊的矩阵.

1. 概念: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow n$ 维行向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \rightarrow n$ 维列向量.

由多个同型向量(维数相同且都为行或列向量)组成的集合称为向量组.

2. 运算: 假设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

转置: $\alpha^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. 加法: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$

数乘: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$ 向量的模 $|\alpha| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

3. 向量组的线性表示

(1) 定义: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量, $k_1, k_2, \dots, k_m$ 是 m 个常数, 则称 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ 为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个线性组合.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量, β 为一个 n 维向量, 如果 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个线性组合, 则称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

任意向量可以由任何向量线性表示. $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \quad \exists k_1, \dots, k_m$

(2) 与线性方程组的关系

定理1: 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$ 有解.

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且不唯一 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x = \beta$ 有解, 且有无穷多解.

(3) 向量组的线性表示

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 中每一个向量都能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示,

则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 向量组 B 可由向量组 A 表示.

若 $\alpha(I)$ 与 $\beta(II)$ 能互相线性表示, 则称 (I) 与 (II) 等价, 记作 $(I) \cong (II)$.

$B = AP$
 $r(B) = r(AP) \leq r(A)$

$\Rightarrow r(A) = r(B)$. 等价标准型 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 向量组的线性相关.

(1) 定义: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量, 如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 不是线性相关的, 则称为线性无关. $\Leftrightarrow k_1, k_2, \dots, k_m$ 全部为 0.

注: 任何含零向量的向量组必线性相关.

(2) 与线性方程组的关系

定理2: 向量组 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(d_1, d_2, \dots, d_n)X=0$ 有非零解

5. 常用定理公式.

定理3: 向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性相关当且仅当 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 中至少有一个是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

定理4: 若向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性相关, 则向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1}$ 也线性相关.

注: 部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关. 整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.

定理5: 若向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性无关, 则延伸组 $\begin{pmatrix} d_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_m \\ \beta_m \end{pmatrix}$ 也线性无关.

注: 向量组无关 $\Rightarrow$ 延伸组无关.

定理6: 已知向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性无关, 且向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性表出.

定理7: 阶梯型向量线性无关.

定理8: 若向量组 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且

$d_1, d_2, \dots, d_s$ 线性无关, 则有 $s \leq t$. 逆否: α 由 β 表示, 若 $t < s$, 则 α 线性相关.

方向别反了.

注: 1) 表出无关的向量组, 个数上要占优.

2) 多数被少数表出, 多数必相关.

却是 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 相关/无关.

(少数被多数表出, 少数必无关)

定理9: $n+1$ 个 n 维向量必然线性相关. $\Leftrightarrow$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 方程数 $<$ 未知数

$(a_1, b_1, c_1)^T, (a_2, b_2, c_2)^T, (a_3, b_3, c_3)^T, (a_4, b_4, c_4)^T$

Δ 向量组中两个向量成比例 $\rightarrow$ 必线性相关.

Δ n 个线性无关的 n 维向量可以线性表出任意 n 维向量.

4个3维向量必线性相关!

二、向量组的秩.

1. 极大线性无关组.

(1) 概念: 设 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 为一个向量组, $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_t}$ 为其中线性无关的 t 个向量, 如果再加上 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 中的任何一个向量 d_j , 新的向量组线性相关.

则称 $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_t}$ 为向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 的极大线性无关组.

注: 极大无关组就是把冗余向量剔除后最多的, 线性无关的子向量组.

(2) 计算步骤

Step 1: 将向量组作为列向量组成矩阵 A . (若行向量, 先取转置).

Step 2: 对矩阵 A 做初等行变换, 化为阶梯型矩阵.

Step 3: 在阶梯型矩阵中标出每个非零行的主元 (第一个主元), 主元所在列即对应原向量组的一个极大线性无关组. $\rightarrow$ 极大无关组可不止一个, 用此方法可找到一个

(3) 性质:

定理 10: 任一向量组和自己的极大线性无关组等价.

推论 1: 向量组的任意两个极大线性无关组等价.

2: 等价的向量组的极大线性无关组等价.

2. 向量组的秩.

(1) 概念: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的极大线性无关组中所含向量的个数称为该向量组的秩, 记作 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. 由零向量组成的向量组无极大无关组, $r=0$.

(2) 性质:

定理 11: 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的条件是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m$.

$\rightarrow$ 极大无关组非空

$$r(A) = r(BP) \leq r(B)$$

$$A=BP$$

定理 12: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表出, 则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m).$$

推论: 等价的向量组秩相同.

定理 13: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 能线性表出 β 的充要条件是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$

3. 矩阵的秩与向量组的秩.

$A_{m \times n}$. 矩阵的秩 = 行向量组的秩 = 列向量组的秩.

定理 14: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 个 n 维向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的

充要条件是 以它们为列向量的矩阵的行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

$$\text{线性无关} \Leftrightarrow \text{方程组仅有零解} \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

$$\text{线性相关} \Leftrightarrow \text{有非零解} \Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0.$$

<补充>与秩相关的公式.

$$1. r(A) = r(A^T) = r(KA), K \neq 0.$$

$$2. A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) \geq 1.$$

$$3. r(A) = 1 \Leftrightarrow A \neq 0, \text{且} A \text{各行元素成比例}.$$

$$4. \text{设} A \text{为} n \text{阶矩阵, 则} r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0. \Leftrightarrow d_1, d_2, \dots, d_n \text{线性无关}.$$

$$5. r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}. \quad d_1, d_2, \dots, d_n \text{为} n \text{个} m \text{维向量}$$

$$6. \text{若} d_1, d_2, \dots, d_s \text{可以由} \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \text{线性表出, 则} r(d_1, d_2, \dots, d_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

推论1: 设矩阵 P 可逆, $r(PA) = r(A)$, $r(PB) = r(B)$. $\Rightarrow$ 乘以可逆矩阵不改变原矩阵的秩.

$$\text{推论2: } r(A \pm B) \leq r(A) + r(B).$$

$$7. \text{设} A \text{为} m \times n \text{矩阵, } B \text{为} n \times s \text{矩阵, 若} AB = 0, \text{则} r(A) + r(B) \leq n.$$

$$\text{推论: 设} A \text{为} n \text{阶方阵, 则} r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

Δ 对 $AB=0$ 的两种基本处理思路: B 的列向量都是 $AX=0$ 的解 or $r(A) + r(B) \leq n$.

① 具体型向量组线性相关性的判定.

① 当向量个数 > 向量维数. (列数 > 行数), 必定线性相关.

② 当向量个数 = 向量维数. 通过行列式判定 $|A| = 0$.

无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. 线性相关 $\Leftrightarrow$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$.

③ 当向量个数 < 向量维数. 通过秩来判断 $r(A) < n$.

② 证明向量组线性无关. 再看!

① 用定义法: 假设 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n = 0$ 利用条件推出 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

1° 将 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n$ 展开, 化为 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 的齐次方程组, $\Leftrightarrow$ 仅有零解 $\Leftrightarrow |c| \neq 0$.

2° 按已知信息, 等式两边同乘以某矩阵, 从而利用条件推出 $k_1, \dots, k_n$ 全为 0.

② 假设 n 维向量 d_1, d_2, d_3 线性无关. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 d_1, d_2, d_3 线性表示.

设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (d_1, d_2, d_3)C$. 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关的充要条件 $|c| \neq 0$.

线性无关. Δ 可逆 $\Leftrightarrow |c| \neq 0$.

$\therefore r(\beta) = r(d) = 3. \Rightarrow$ 线性无关.

<错题> 核心笔记 · 第三章 · 向量

1. ① 如果 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性相关, 则存在不全为 0 的

1. ① X ② V ③ V ④ X

常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n = 0$.线性相关: 存在不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_n$,② 如果 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性无关, 则对任意不全为使得 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n = 0$.0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 都有 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n \neq 0$ ③ 如果 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性无关, 则由 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots +$ $k_n d_n = 0$ 可以推出 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.④ 如果 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性相关, 则对任意不全为 0的常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 都有 $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n = 0$.2. 已知 n 维列向量 d_1, d_2, d_3 线性无关, 问 m, k 满

2. $(k d_2 - d_1, m d_3 - d_2, d_1 - d_3) = (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$

足什么条件时, 向量组 $k d_2 - d_1, m d_3 - d_2, d_1 - d_3$ 当 B 可逆, $r=3$, 线性无关 $\Leftrightarrow |B| \neq 0$.

线性无关?

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -1 + km \neq 0 \Rightarrow km \neq 1.$$

3. 设 $d_1 = (1, 2, 0)^T$, $d_2 = (1, a+2, -3a)^T$, $d_3 = (-1, -b-2,$

3. (I) $(d_1, d_2, d_3, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{array} \right)$

 $a+2b)^T$, $\beta = (1, 3, -3)^T$, 试讨论当 a, b 何值.当 $a=0, b$ 为任意常数, $r(A) \neq r(B)$, 不能表示.(I) β 不能由 d_1, d_2, d_3 表示(II) β 可由 d_1, d_2, d_3 唯一表示, 并求出表示式.(II) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时, $r(A)=r(B)$, 有唯一解.(III) β 可由 d_1, d_2, d_3 线性表示, 但表示不唯一,

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array} \right) \rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{a}, x_3 = 0$$

并求出表示式.

$$\therefore \beta = (1 - \frac{1}{a}) d_1 + \frac{1}{a} d_2$$

(III). 当 $a \neq 0$ 且 $a=b$ 时, $r(A)=r(B)=2 < 3$, 无穷多解

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{a} + k, x_3 = k$$

$$\therefore \beta = (1 - \frac{1}{a}) d_1 + (\frac{1}{a} + k) d_2 + k d_3$$

4. 求 t 为何值时, 向量组 $d_1 = (t, 2, 1)$, $d_2 = (2, t, 0)$,

4. $A = (d_1^T, d_2^T, d_3^T) = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1-t \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(t-t-b) \end{pmatrix}$

 $d_3 = (1, -1, 1)$ 线性相关, 并在线性相关时,

$$\therefore t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ or } t = -2.$$

将其中一个向量可以用其余向量线性表出.

$$\text{当 } t = 3 \text{ 时 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = d_2 + d_3.$$

$$\text{当 } t = -2 \text{ 时 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = -\frac{3}{2} d_2 + d_3$$

5. 设向量 β 可由向量组 $d_1, d_2, \dots, d_m$ 线性表示, 选 B. 存在 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使 $\beta = \sum_{i=1}^m k_i d_i$.

但不能由向量组 (I) $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ 线性表示. (1) $k_m \neq 0$. 因为若 $k_m = 0$, β 可由 $d_1 \dots d_{m-1}$ 表示, 矛盾.

记向量组 (II): $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, \beta$, 则 (). $\because k_m \neq 0, \therefore d_m = \frac{1}{k_m} (\beta - \sum_{i=1}^{m-1} k_i d_i)$

A. d_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示. $\therefore d_m$ 可由 $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, \beta$ 表示.

B. d_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示. (2) d_m 不能由 $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ 表示.

C. d_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示. 否则 $d_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i d_i$. $\beta = \sum_{i=1}^m k_i d_i = \sum_{i=1}^{m-1} k_i d_i + \sum_{i=1}^{m-1} c_i d_i$

D. d_m 可由 (I) 线性表示, 但不能由 (II) 线性表示. 与 β 不能由 $d_1, \dots, d_{m-1}$ 表示矛盾.

6. 设向量组 $d_1 = (1, 0, 1)^T, d_2 = (0, 1, 1)^T, d_3 = (1, 3, 5)^T$, 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T$

$\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示. $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 当 $a = 5$ 时, 不能表示.

(1) 求 a 的值.

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 d_1, d_2, d_3 线性表示.

(2) $(d_1, d_2, d_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \beta_1 = 2d_1 + 4d_2 - d_3, \beta_2 = d_1 + 2d_2, \beta_3 = 5d_1 + 10d_2 - 2d_3.$

7. 设 4 维向量组 $d_1 = (1, a, 1, 1)^T, d_2 = (2, 2, a, 2)^T, d_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, d_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$.

问 a 为何值时, d_1, d_2, d_3, d_4 线性相关. 当

d_1, d_2, d_3, d_4 线性相关时, 求一个极大无关组,

并将其余向量用该极大无关组表示.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Δ 先要做初等行变换! 别用行列式的技巧!

当 $a=0$ 时, $r=1$. d_1, d_2, d_3, d_4 线性相关.

d_1 为极大无关组. $d_2 = 2d_1, d_3 = 3d_1, d_4 = 4d_1.$

当 $a \neq 0$ 时. $\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Δ 不一定要化成标准型, 只要能看出秩!

当 $a \neq -10$. $r=4$. 线性无关.

当 $a = -10$. $r=3$. 线性相关.

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

极大无关组 d_1, d_2, d_3 . $\therefore d_4 = -d_1 - d_2 - d_3$

8. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $r(A^*) = 1$, 则 ().

A. $a = -2b$

B. $a = b$

C. $a = -2b$ 且 $a \neq b$.

D. $a = b$ 且 $a \neq -2b$.

8. $r(A) = 2$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0.$$

$\therefore a = -2b$ or $a = b$. 又 $a = b$ 时, $r = 1$.

$\therefore a = -2b$ 且 $a \neq b$. 选 C.

9. 设 A 是 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9. B 可逆. $r(AB) = r(A) = 2$.

则 $r(AB) =$ ____.

<错题> <数学分析角. 第七章. 向量组>

1. 设向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 (II)

1. 选 D.

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

多数被少数表示, 多数必相关.

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

(D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由向量组

2. 选 B.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 一定线性无关.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意的常数 k , 必有

若线性相关. $k\beta_1 + \beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

$\Rightarrow \beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$. 矛盾.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.

当 $k \neq 0$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关.

当 $k = 0$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

3. 以下错误的是:

3. 选 C. $\alpha_1 = (1, 0)$. $\alpha_2 = (2, 0)$.

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也相关.

$\beta_1 = (0, 1)$. $\beta_2 = (0, 3)$.

(B) 若 α_1, α_2 线性无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 也线性无关.

$\alpha_1 + \beta_1 = (1, 1)$. $\alpha_2 + \beta_2 = (2, 3)$. $\Rightarrow$ 无关.

(C) 若 α_1, α_2 线性相关, β_1, β_2 线性相关, 则 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$ 也相关.

4. 设 n 维向量 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 的秩等于3, 则

4. 选B.

A. d_1, d_2, d_3 中任何4个向量相关/任何3个向量无关

若 d_i 中有一个零向量, 则 $B \times C \times$

B. 存在含有两个向量的无关的部分组

$$d_4 = d_1 + d_2 + d_3.$$

C. 相关部分组包含的向量个数多于3.

$s > 3$, 但 d_4 不是0向量.

D. 如果 $s > 3$, 则 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 中有零向量.

5. 设 A 是 n 阶矩阵, $d_1, d_2, \dots, d_s$ 是一组 n 维向量, 5. 选D.

$\beta_i = A d_i, i=1, 2, \dots, s$, 则()

A. 可能线性相关.

A. 如果 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 线性无关, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也无关.

B. 只有 A 可逆时成立.

B. $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(d_1, d_2, \dots, d_s)$.

C. 也可能相等.

C. 如果 A 不可逆, 则 $r(d_1, d_2, \dots, d_s) > r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

可逆 $\Rightarrow r(d_1, d_2, \dots, d_s) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

D. 如果 $r(d_1, d_2, \dots, d_s) > r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, 则 A 不可逆.

想想逆否命题, 就明白了.

6. 3阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. 当 A 可逆, $r(A) = r(B)$. 同构.

$\therefore$ 隐含条件: $r(A) \leq 2, r(B) \leq 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3-a+b \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(5-a-b) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Rightarrow \begin{cases} a = -29 \\ b = -8 \end{cases} \times$$

$$a = 5, b = -2.$$

$$\therefore r(A) = r(B) = 2, r(A) = 1$$

7. 设 $d_1 = (1, 0, 1), d_2 = (2, -1, 0), d_3 = (-1, 2, 0)$. 7. 即证: $(d_1, d_2, d_3, C_1\beta_1 + C_2\beta_2)$ 相关.

$$\beta_1 = (0, 1, 0, 1), \beta_2 = (1, 1, 1, 1).$$

秩为3.

问 C_1, C_2 满足什么条件时 $C_1\beta_1 + C_2\beta_2$ 可以用

先算 $A = (d_1, d_2, d_3)$ $r(A) = 3$.

$d_1, d_2, \dots, d_r$ 线性表示?

$\therefore d_1, d_2, d_3$ 无关.

$$B = (d_1, d_2, d_3, C_1\beta_1 + C_2\beta_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & C_2 \\ 0 & -1 & 2 & C_1 + C_2 \\ 1 & 0 & 2 & C_2 \\ 1 & 1 & 0 & C_1 + C_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & C_2 \\ 0 & -1 & 2 & -C_1 - C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2(C_1 + C_2) \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2C_1 + C_2 = 0, \text{ 或 } \vec{2}.$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & C_2 \\ 0 & 1 & -2 & -C_1 - C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2(C_1 + C_2) \\ 0 & 0 & 0 & C_1 + 2C_2 \end{pmatrix}$$

$$2C_2 + C_1 = 0.$$

<第四章> <线性方程组>

一、线性方程组解的判定

$$r(A, b) \leq n$$

1. 线性方程组解的存在性

定理1: 设 $A = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 其中 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 为 A 的列向量, 则线性方程组 $Ax = b$ 有解

$\Leftrightarrow$ 向量 b 能由向量组 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow r(d_1, d_2, \dots, d_n) = r(d_1, d_2, \dots, d_n, b)$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A, b).$$

2. 线性方程组解的唯一性

定理2: 当线性方程组 $Ax = b$ 有解时, $Ax = b$ 的解不唯一 (有无穷多解)

$\Leftrightarrow$ 线性方程组的导出组 $Ax = 0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow$ 向量组 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 线性相关.

$$\Leftrightarrow r(d_1, d_2, \dots, d_n) < n$$

推论1: 设 A 为 n 阶方阵, 则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解的充要条件是 $|A| \neq 0$.

(此推论其实质就是克莱姆法则)

推论2: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 当 $m < n$ 时, $Ax = 0$ 必有非零解.

△总结:

① $A_{m \times n} \cdot X = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$. 不是只看 b , 看增广矩阵 (A, b) .

要验证!

无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A, b) \Leftrightarrow \beta$ 不能由 d_1, d_2, d_3 线性表示 $\Rightarrow |A| = 0$.

② $A_{m \times n} \cdot X = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n \Leftrightarrow \beta$ 可由 d_1, d_2, d_3 唯一地线性表示 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

③ $A_{m \times n} \cdot X = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n \Leftrightarrow \beta$ 可由 d_1, d_2, d_3 线性表示, 且表示不唯一.

$$\Rightarrow |A| = 0.$$

④ $A_{m \times n} \cdot X = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$.

唯一解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

无穷解
无解 $\Rightarrow |A| = 0$.

讨论无穷解和唯一解的前提是: 有解.

① 讨论方程组有解、无解、有唯一解？

1. 当系数矩阵不易作初等变换时，可以借助行列式进行讨论：

(1) 当 $|A| \neq 0$ 时，线性方程组有唯一解。

(2) 当 $|A| = 0$ 时，从方程中解出未知数代入方程组，再讨论是无穷解还是无解。

2. n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 仅有零解。

3. 证明抽象方程有解？解唯一？解无穷？

$\Rightarrow$ 两种思路：① 证明系数矩阵与增广矩阵的秩相同。

② 转化为证明向量的线性表出。

二、线性方程组解的结构。

1. 性质

定理3：如果 η_1, η_2 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解，则 $\eta_1 + \eta_2$ 仍为 $Ax = 0$ 的解。

对于任意的实数 k ， $k\eta_1$ 仍为 $Ax = 0$ 的解。

2. 齐次线性方程组的基础解系。

① 定义：假设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解，向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系：如果它满足如下三个条件（是解，无关，表出）。

(1) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 都是 $Ax = 0$ 的解。 (2) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性无关。

(3) $Ax = 0$ 的任意解都可以由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性表出。 $\Rightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 的个数为 $n - r(A)$ 。

如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 为 Ax 的基础解系，则 $Ax = 0$ 的通解可以表示为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_s\xi_s$ 。

注：基础解系本质上是齐次线性方程组解集的一组极大线性无关组。

② 性质：设 $A_{m \times n}X = 0$ (m 个方程， n 个未知量) 系数矩阵 A 的秩 $r(A) < n$ 。

则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系存在，并且任意一个基础解系中含有 $n - r(A)$ 个解向量。

(即自由变量的个数) $\leftarrow$ 是 A 的列数，不是 (A, b) 的列数！

数值/抽象型: Step 1: 求 $r(A)$. Step 2: 求 $n-r(A)$ 个线性无关的解, 即通解.

③ 计算方法: (数值型)

Step 1: 设 $r(A) = r < n$. 对 A 实施初等行变换 $\rightarrow$ 阶梯型矩阵, 找出主元 (每行第一个非零元)

Step 2: 通过初等行变换 $\rightarrow$ "行最简形" (主元所在列成为单位向量) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Step 3: 写出对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ x_2 + \cdots = 0 \\ x_3 + \cdots = 0 \end{cases}$$

去掉主元所在列, 剩下的列数, 即为自由变量的个数.

$= n - r$

Step 4: 令 "自由变量" (除主元以外的变量), 其中 1 个为 1, 其余为 0.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Step 5: 把 $x_4 = ?$, $x_5 = ?$ 代入方程, 解出 x_1, x_2, x_3

得到 $n-r$ 个线性无关的解向量 $\eta_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \eta_{n-r}$.

η 基础解系 $= k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

3. 非齐次线性方程组解的性质.

定理 4: (1) 如果 η_1, η_2 为 $AX=b$ 的两个解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 为 $AX=0$ 的解.

(2) 如果 η_1 为 $AX=b$ 的解, η_2 为 $AX=0$ 的解, 则 $\eta_1 + \eta_2$ 为 $AX=b$ 的解.

4. 非齐次线性方程组的通解.

定理 5: (解的结构) 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.

η_0 为 $AX=b$ 的任意一个解, 则 $AX=b$ 的通解可表示为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} + \eta_0$.

$\downarrow$
 $AX=0$ 的通解.

特解

计算方法 (同 $AX=0$ 求通解)

Step 1: 用 $AX=0$ (不管 b) $\rightarrow$ 解出通解 $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \cdots \eta_{n-r}$.

Step 2: 令自由变量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ 求出特解 η_0 .

$\Rightarrow$ 通解 $= k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} + \eta_0$.

如果 $AX=0$ 有 k 个线性无关的解, 则 $r(A) \leq n-k$, (因为 $AX=0$ 的基础解系中至少有 k 个向量).

$n-r(A) \geq k$.

② 已知 $AB=0$, $B \neq 0$.

有两种思路: ① B 的列向量均为 $Ax=0$ 的解. 由 $B \neq 0$ 可知

$$Ax=0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow |A|=0.$$

② $r(A)+r(B) \leq n$. 由 $B \neq 0$ 可知 $r(B) \geq 1$.

$$r(A) \leq n-1 \Leftrightarrow |A|=0.$$

<错题><核心笔记·第四章·线性方程组>

1. 求 λ 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解或有无穷多解.

1. 直接矩阵行变换太麻烦!!! $\rightarrow$ 考虑系数矩阵行列式

系数矩阵行列式为
$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5\lambda^2 - \lambda - 4.$$

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时, 有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

有无穷解

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{24}{5} & \frac{9}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

 $\rightarrow$ 无解

2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 线性方程

组 $ABx = 0$ ()

A. 当 $n > m$ 时仅有零解.

B. 当 $n > m$ 必有非零解.

C. 当 $m > n$ 时仅有零解.

D. 当 $m > n$ 必有非零解.

2. D. $AB_{m \times m}$.

证: $r(AB) \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.

当 $m > n$, $r(AB) \leq n < m \therefore$ 必有非零解.

当 $n > m$, $r(AB) \leq m < n$. 此时不知道零解, 非零

证: $m > n$ 时, $Bx = 0$ 必有非零解.

易证 $Bx = 0$ 的解均为 $ABx = 0$ 的解

$\Rightarrow ABx = 0$ 也有非零解 $\therefore$ 选 D.

3. 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 若秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A)$ 3. D.

则线性方程组

$$r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A), r(A) \leq n < n+1.$$

A. $ABx = \alpha$ 必有无穷多解. B. $ABx = \alpha$ 必有唯一解.

$\therefore r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} < n+1.$

C. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 仅有零解 D. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解. $\therefore$ 必有非零解.

$$r(A) \leq r(A, \alpha) \leq r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A).$$

$\therefore r(A, \alpha) = r(A)$. 只知有解, 无法判断唯一或无穷.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 2 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 1 \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, 且向量 $(1, 1, 1, 1)^T$,

4. 由于 $(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 3, 4)^T$ 线性无关.

$(1, 2, 3, 4)^T$ 同为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 试

$\therefore r(A) \leq 4 - 2 = 2$. 又 $\because A$ 有非零二阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$,

求 $AX = 0$ 的通解.

可知 $r(A) \geq 2, \therefore r(A) = 2$.

$\therefore AX = 0$ 的通解为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

5. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \dots + 2x_n = 0 \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \dots + (n+a)x_n = 0 \end{cases}$$

($n \geq 2$), 试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求其解.

5. 要求具体解! 还是老实矩阵变换! 不用行列式!

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -2a & a & a & \dots & a \\ -3a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = B$$

(1) 若 $a=0$, $r(A)=1$. 方程有非零解. 同解方程

为 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. $\therefore$ 基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots$$

$\eta_{n-1} = (-1, 0, \dots, 0, 1)^T$. $\therefore$ 通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-1}\eta_{n-1}$.

(2) 若 $a \neq 0$. 对 B 做类似的初等行变换.

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+\frac{1}{2}n(n+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a = -\frac{1}{2}n(n+1)$ 时, $r(B) = n-1 < n$. 方程有非零解.

$$\text{同解方程为 } \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ -nx_1 + x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \eta = (1, 2, \dots, n)^T.$$

通解为 $k\eta$, (k 为任意常数).

6. 已知 d_1, d_2, d_3, d_4 是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系. 6. 已知 d_1, d_2, d_3, d_4 是基础解系 $n-r(A)=4$.

解系, 若 $\beta_1 = d_1 + td_2, \beta_2 = d_2 + td_3, \beta_3 = d_3 + td_4$ 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 均为 $Ax=0$ 的解.

$\beta_4 = d_4 + td_1$, 试讨论当 t 满足什么条件时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (d_1, d_2, d_3, d_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = d \cdot B$$

而 $|B| = 1-t^4$. 当 $t \neq \pm 1$ 时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是线性无关的, 此时也是 $Ax=0$ 的基础解系.

Step 1: 是 $Ax=0$ 的解 Step 2: 线性无关. Step 3: $k=n-r(A)$.

7. 设 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随

7. $d_1 + d_3 = 0$. 且 $4-r(A)=1$. $\therefore r(A)=3$.

矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础

$$\therefore |A| = 0. \therefore A^*A = |A|E = 0.$$

解系, 则 A^*x 的基础解系可为 ()

$$A^*(d_1, d_2, d_3, d_4) = 0. \text{ 说明 } d_1, d_2, d_3, d_4 \text{ 是 } A^*x \text{ 的解.}$$

A. d_1, d_3 B. d_1, d_2 C. d_1, d_2, d_3 D. d_2, d_3, d_4 .

$$\therefore r(A)=3. \therefore r(A^*)=1. \therefore A^*x \text{ 有 } 4-1=3 \text{ 个解向量.}$$

而 $d_1 + d_3 = 0$. d_1, d_2, d_4 线性无关.

或 d_3, d_2, d_4 线性无关.

$\therefore$ 选 D.

6. 已知 A 为 n 阶矩阵, 则

(1) 假设 $r(A) = n-1$, 且 A 的各元素之和为 0, 则

$Ax=0$ 的通解为 _____.

(2) 令 $A = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 并假设 $|A| = 0, A_{11} \neq 0$.

则 $Ax=0$ 的基础解系为 _____.

8. (1) $r(A) = n-1, n-r(A) = 1$.

$\therefore A \cdot (1, 1, \dots, 1)^T = 0$. 各行元素之和 = 0.

通解为 $k(1, 1, \dots, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.

(2) $|A| = 0, \therefore r(A) < n. \therefore A_{11} \neq 0, \therefore r(A) \geq n-1$.

$\therefore r(A) = n-1, n-r(A) = 1$.

$\therefore |A| = 0, \therefore A^* \cdot A = 0, \therefore A \cdot (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n})^T = 0$.

$\therefore (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n})^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

9. 已知 β_1, β_2 是 $Ax=b$ 的两个不同的解, d_1, d_2 是相应

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, k_1, k_2 是任意

常数, 则 $Ax=b$ 的通解是 ()

A. $k_1 d_1 + k_2 (d_1 + d_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ B. $k_1 d_1 + k_2 (d_1 - d_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

C. $k_1 d_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ D. $k_1 d_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

10. 已知方阵 $A = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, d_1, d_2, d_3, d_4 均为 4 维

列向量, 其中 d_2, d_3, d_4 线性无关, $d_1 = 2d_2 - d_3$. 如果

$\beta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

10. 由 d_1, d_2, d_3 线性无关, $d_1 = 2d_2 - d_3 + 0d_4$.

$r(A) = 3, \therefore n-r(A) = 1$.

由 $d_1 - 2d_2 + d_3 + 0d_4 = 0, k(1, -2, 1, 0)^T$ 为通解.

由 $\beta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, (1, 1, 1, 1)^T$ 为特解.

$\therefore$ 通解为 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

11. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$

有三个线性无关的解.

(1) 证明系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$.

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

11. (1) $s_1 - s_2, s_1 - s_3$ 是 $Ax=0$ 两个线性无关解.

故 $4-r(A) \geq 2, \therefore r(A) \leq 2$.

又 A 有一个 2×2 子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \therefore r(A) \geq 2, \therefore r(A) = 2$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4+2a & 4+b \end{pmatrix}$

$\therefore 4+2a=0, 4+b=0, \therefore a=-2, b=-4, \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\therefore$ 通解 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2$ 为任意常数.
 $n-r(A) = 2 !!$

12. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=0$

仅有零解的充分条件是 ()

A. A 的列向量线性无关. B. A 的列向量线性相关.

C. A 的行向量线性无关. D. A 的行向量线性相关.

12. A.

有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关.

13. 设线性方程组 (I): $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程组 (II): $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解. 求 a 的值及所有公共解.

两个线性方程组的公共解就是将它们联立后

$$\text{联立后 } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

显然当 $a \neq 1, a \neq 2$ 时无公共解.

当 $a=1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\xi = k(1, 0, -1)^T$.

当 $a=2$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\xi = (0, 1, -1)^T$.

14. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵

14. $r(A) + r(B) \leq 3$.

$r(B) \geq 1 \Rightarrow r(A) \leq 2$. $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

记为 A . 若存在三阶矩阵 $B \neq 0$, 使 $AB=0$, 则 ()

又 $\lambda=1$ 时 $r(A)=1$, $r(B)=2 \Rightarrow r(B) \geq 1$.

A. $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$. B. $\lambda=-2$ 且 $|B| \neq 0$

$\Rightarrow |B|=0$

C. $\lambda=1$ 且 $|B|=0$ D. $\lambda=1$ 且 $|B| \neq 0$.

15. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $A^*x=0$ 的通解为

$k_1(1, 1, 2)^T + k_2(1, 2, 3)^T$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

15. $r(A)=2 \Rightarrow r(A^*)=1$.

又 $A^*A = |A|E = 0 \Rightarrow A$ 的列向量均为 $A^*x=0$ 解.

故 A 的任意两个线性无关的列向量都可以作为基础解系.

16. 设 $(1, 1, 1, 1)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - ax_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

16. $a=3$. 求出通解 $(-5, 4, 8, 9)^T$.

$(1, 1, 1, 1)^T$ 是特解. 不要浪费空间另求特解了!

的一个解向量, 则该线性方程组的通解为 $(1, 1, 1, 1)^T + k(-5, 4, 8, 9)^T$, $k \in \mathbb{R}$.

(是不是傻, 下次别再求特解了)

<题源> <数分高数分章第八章·方程组>

1. 设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵, 1. 选 A.

则必有

设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_s)$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$.

A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_s\beta_s = 0$.

B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

$\because A, B$ 为非零矩阵, $\therefore$ 存在不全为零的数

C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

使 $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{is}\beta_s = 0$

D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

$b_{1j}a_1 + b_{2j}a_2 + \dots + b_{sj}a_s = 0$.

$\therefore A$ 的列向量相关, B 的行向量相关.

2. 已知3阶矩阵A的第一行是(a, b, c), a, b, c不全

为0, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$, k为常数. 且 $AB=0$.

求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

$$2. \quad r(B) + r(B) \leq 2.$$

若 $k \neq 9$, $r(B)=2$, $r(A) \leq 1$. 显然 $r(A) \geq 1$. $\therefore r(A)=1$.

$n-r(A)=2$. $\therefore B$ 的第1, 3列线性无关.

$$\therefore x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

若 $k=9$, $r(B)=1$, $r(A) \leq 2$.

$$\textcircled{1} \quad r(A)=2. \quad x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\textcircled{2} \quad r(A)=1$. 同解方程组 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

3. 设A是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A)=r$, 则

A. $r=m$ 时, 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解

B. $r=n$ 时.

C. $m=n$ 时

D. $r < n$ 时.

$Ax=\beta$ 有唯一解

$Ax=\beta$ 有解

$Ax=\beta$ 有无穷解.

3. 选A.

$$(Ax) = \beta$$

$$r(\bar{A}) \geq r(A) = r = m \text{ 且 } r(\bar{A}) \leq m \Rightarrow r(\bar{A}) = r(A) = m$$

$\Rightarrow Ax=\beta$ 有解.

B. $r(A)=n$. $Ax=\beta$ 可能无解 or 唯一解.

$$\text{当 } m > n \text{ 时, } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad c_3 \neq 0 \text{ 无解.}$$

C. 当 $r(A) \neq r(\bar{A})$, 无解.

D. 当 $r(A) < n$. 无穷解 or 无解.

4. 设 $m \times n$ 矩阵A的秩为 $r(A)=m < n$, E_m 为 m 阶

单位矩阵, 则下列结论正确的是

A. A的任意 m 个列向量必线性无关

B. A的任意 m 阶子式必不等于0

C. 若矩阵B满足 $BA=0$, 则必有 $B=0$

D. A通过初等行变换, 必可化为 $(E_m, 0)$ 的形式.

4. 选C.

$$A. \quad r(A_{m \times n}) = m < n. \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1 \dots \beta_n)$$

$$\text{则 } r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = m \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性无关. 行向量}$$

$$r(\beta_1 \dots \beta_n) = m < n. \Rightarrow \beta_1 \dots \beta_n \text{ 线性相关. 列向量}$$

B. $r(A)=m$. 存在 m 阶子式不等于0.

$$D. \quad A \xrightarrow{\text{行变换}} (E_m, C) \xrightarrow{\text{列变换}} (E_m, 0).$$

$$C. \quad B_{k \times m} A_{m \times n} = O_{k \times n}.$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} \\ \vdots \\ 0_{k \times n} \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum_{j=1}^m b_{1j} \alpha_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{kj} \alpha_j = 0 \end{cases}$$

$$r(A)=m \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ 线性无关. } |A| \neq 0.$$

$$\Rightarrow b_{1j}=0, \dots, b_{kj}=0. \quad j=1, \dots, m$$

$$\Rightarrow B = O_{k \times m}. \quad |A||B|=0. \Rightarrow B=0$$

A.B.

5. 设A为 $m \times n$ 矩阵, B为 $n \times m$ 矩阵, 对于齐次线性方程组 (AB)x=0, 以下正确的是

$$r[(AB)_{m \times m}] \leq r(A_{m \times n}) \leq m < n$$

$$\therefore r(AB) = m \text{ or } < m. \quad \text{零解 or 非零解}$$

A. 当 $n > m$ 时仅有零解.B. 当 $n > m$ 时必有非零解.

$$C. D. \quad r[(AB)_{m \times m}] \leq r(A_{m \times n}) \leq n < m$$

C. 当 $m > n$ 时仅有零解.D. 当 $m > n$ 时必有非零解. $\Rightarrow$ 必有非零解.

$$6. a, b \text{ 取何值时, 线性方程组 } \begin{cases} ax + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\checkmark. \bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{b \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1-2ab \\ 0 & 0 & 1 & 4b-2ab-1 \end{pmatrix}$$

有解? 有解时, 何时有唯一解, 何时有无穷解?

$$\text{当 } b=0 \text{ 时 } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 无解.}$$

当 $b \neq 0, a \neq 1$ 时, 有唯一解.当 $b = \frac{1}{2}, a = 1$ 时, 无穷解.当 $b \neq 0$ 且 $b \neq \frac{1}{2}, a = 1$ 时, 无穷解.

概率论 Part

<第一章> 随机事件及其概率

一、随机事件

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则 $A = B$. (A, B 相等).1. 概念: 随机试验 E 、样本空间 Ω 、随机事件 A 2. 关系: 包含 $A \subset B$. 互斥 $A \cap B = \emptyset$ (互不相容)对立 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$. $\Rightarrow A$ 与 B 互为逆事件, $B = \bar{A}$.完备事件组, 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 并且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$. $\Rightarrow$ 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组3. 运算: 和事件 $A \cup B = A + B$. 积事件 $A \cap B = AB$ 差事件 $A - B = A\bar{B} = A - AB$ 分配律: $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC) \Rightarrow (A + B)C = AC + BC$ $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C) \Rightarrow (AB) + C = (A + C)(B + C)$ 对偶律(德摩根律): $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$. $\overline{A \cap (B \cup C) \cap D} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) \cup \bar{D}$ 吸收律: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

二、概率与条件概率

1. 概率 $P(A)$ 的公理化定义(1) 非负性: $P(A) \geq 0$.(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$ (3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ $\Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$. 和事件的概率 = 概率之和.

2. 概率的性质.

① $P(\emptyset) = 0$.

概率为 0 的事件不一定是不可能事件, 但不可能事件的概率为零.

② 有限可加性: 设 $A_k, k=1, 2, \dots, n$ 为互不相容事件, 则 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.③ 减法公式: $P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$ ④ 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.⑤ 逆事件: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ⑥ 单调性: 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$

3. 条件概率的定义: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) > 0$. 称为随机事件 A 发生的条件下, B 发生的概率

4. 条件概率的性质: ① 非负性: $P(B|A) > 0$

② 规范性: $P(\Omega|A) = 1$

③ 可列可加性: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | A)$

④ 当 $P(A) > 0$ 时, $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A)$ ($\because P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$)

$- P(B_1 B_2 | A)$.

当 $P(A) > 0$ 时, $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

$P(B_1 - B_2 | A) = P(B_1 | A) - P(B_1 B_2 | A)$.

$P(C|AB)P(AB) = P(CAB)$

$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$. $P(A) > 0$, $P(B|A) > 0$.

5. 独立性的定义: ① 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, A, B 独立.

注: A, B 独立 $\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$

即 A 发生与不发生对 B 无影响.

$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = P(B)$.

② 如果 A, B, C 两两独立, 且满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 则 A, B, C 相互独立.

两两独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$.

相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

6. 独立性的性质: ① 若 $P(A) > 0$, 且 A, B 独立, 则 $P(B|A) = P(B)$.

② 若 A, B 相互独立, 则 $A, \bar{B}$; $\bar{A}, B$; $\bar{A}, \bar{B}$ 也相互独立. (独立时, 对立事件也独立)

③ 概率为 0 和 1 的事件与任何事件独立.

三、简单概率型

1. 古典概率型 (有限等可能).

$P(A) = \frac{\text{A中的样本点数}}{\Omega \text{中的样本点数}}$

2. 几何概率型 (无限等可能) (线段、区域、空间).

$P(A) = \frac{A \text{的度量}}{\Omega \text{的度量}}$ (长度、面积、体积) = 度量之比.

注: 1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

2) 排列组合 $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots}{m!} \rightarrow m \text{ 个}$

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \dots$
m 个.

概率是相同的.

□ (1) “抽签原理”. (抽签与先后顺序无关), 在不放回的抽签中, 每个位置上抽中某特定的签的

(2) 当事件中碰到了“至少” or “至多”时, 一般可以通过逆事件 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

考虑对立事件!

四. 常见公式. (五大公式).

1. 加法: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $\xrightarrow{\text{若 } AB = \emptyset} P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

2. 减法: $P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$ $\xrightarrow{\text{若 } B \subset A} P(A-B) = P(A) - P(B)$

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$$

3. 乘法: $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) \quad (P(A) > 0, P(AB) > 0)$$

4. 全概率公式 (第一阶段有多种可能, 直接计算第二阶段的结果会很麻烦!)

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组, $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$.

$$\text{则 } P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

5. 贝叶斯公式 (已知第二阶段某结果发生, 求由第一阶段某种结果引起的概率)

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组, $P(A_i) > 0, P(B) > 0$.

$$\text{则 } P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

<例题> <核心笔记·第一章·随机事件及其概率>

1. 将3个球随机地放到4个杯子中去, 求4个杯子中

球的个数而最大值分别为1, 2, 3的概率.

$$p_1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{3}{8} = \frac{C_4^3 \cdot A_3^3}{4^3}$$

$$p_2 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{4^3} = \frac{9}{16} \quad (\text{选1个杯子放2个球} \dots)$$

$$p_3 = \frac{C_4^1}{4^3} = \frac{1}{16}$$

2. 有5双鞋, 从中随机取4只, 求

(1) 4只鞋都没配对成功的概率

(2) 恰好有一双配成对的概率

(3) 至少有一双配成对的概率

$$2. (1) p_1 = \frac{C_5^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_8^4} = \frac{8}{21}$$

$$(2) p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1}{C_8^4} = \frac{4}{7}$$

$$(3) p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 + C_5^2}{C_8^4} = \frac{13}{21}$$

$$\text{or } p_3 = 1 - p_1 = \frac{13}{21}$$

3. 10位乘客来到某20层大楼的一层乘电梯上

楼. 每个乘客在任何一层(从2到20层)离开是等

可能的, 求至少有两个人在同一层下的概率是多少?

$$3. P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{19}^{10}}{19^{10}} = 1 - \frac{C_{19}^{10} \cdot A_{10}^{10}}{19^{10}}$$

4. A, B, C 两两独立, $ABC = \emptyset$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$,

$P(A) = P(B) = P(C)$, 则 $P(A) =$ ____.

$$4. P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= 3P - 3P^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore P = \frac{1}{4} \text{ or } \frac{3}{4}. \text{ 又 } \because P = \frac{3}{4} \text{ 时, } P(A) > P(A \cup B \cup C) \text{ (舍)}$$

$$\therefore P = \frac{1}{4}$$

5. 设A, B为两个事件且 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, 求 $P(AB)$

的最大值和最小值.

5. 易知 $P(AB) \leq \min\{P(A), P(B)\} = P(A) = 0.6$.

当 $A \subset B$ 时 $P(AB)_{\max} = 0.6$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1.3 - P(AB)$$

$$\therefore P(A \cup B) \leq 1. \therefore P(AB) \geq 0.3$$

$$\text{当 } A \cup B = \Omega, P(A \cup B) = 1, P(AB) = 1.3 - P(A \cup B) = 0.3.$$

6. 一批产品有10个正品和2个次品, 任意抽取两次,

每次抽一个, 不放回, 则第二次抽出是次品的概率为

6. 方法1: 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取得次品}\}, i=1, 2$ 枚举!

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, P(\bar{A}_1) = \frac{5}{6}, P(A_2 | A_1) = \frac{1}{11}, P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{2}{11}$$

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{6}$$

方法2: 由抽签原理, 抽签与先后次序无关,

第二次抽得次品概率与第一次相同 $= \frac{1}{6}$.

7. 有20枚硬币, 其中有5枚次品(2面都是国徽). 任取一枚, 抛3次, 都是国徽. 求这枚是次品的概率.

7. 令事件A是硬币是次品. B表示3次都是国徽.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{20} = \frac{11}{32}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{11}{32}} = \frac{6}{11}$$

8. 一实习生用同一台机器接连独立地制造3个同种零件, 第*i*个零件是不合格品的概率, $P_i = \frac{i}{i+1}$,

($i=1, 2, 3$), X 表示3个零件中合格品的个数.

则 $P\{X=2\} =$ _____

$$P\{X=2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{24}$$

<例题> 数学两角三角·第九章·随机事件及概率

1. 从0, 1, ..., 9中任选3个不同数字, 试求

$A_1 = \{\text{三个数字中不含0与5}\}$.

$A_2 = \{\text{三个数字中不含0或5}\}$.

$$1. P(A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

$$P(A_2) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}$$

$A_2: \bar{0} + \bar{5} + \bar{0\&5}$. 对立面 $0\&5$.

2. 进行一系列独立实验, 每次试验成功的概率均为 p .

P 试求以下事件的概率.

(1) 第*r*次成功之前恰失败了*k*次.

(2) 直到第*n*次才取得*r* ($1 \leq r \leq n$)次成功.

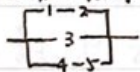
3. 在仅由0, 1, 2, 3, 4, 5组成的3位数中.

(1) 首位为奇数的概率 (2) 求该数大于330的概率

4. 元件正常工作为元件的可靠性. 设5个独立工作

元件1, 2, 3, 4, 5. 先串后并. 设每个元件可靠

性为*P*. 求系统可靠性.



5. 某人忘记密码的最后一个数字, 他随意拨数

求他拨数不超过三次而打开锁的概率.

若已知最后一个数字为偶数. 求概率.

$$2. (1) P = C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1-p)^k$$

$$(2) P = C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$3. P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_5^1 \cdot A_3^3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 4} = 0.48$$

$$P(B) = \frac{C_2^1 \cdot A_2^2 + C_2^2 \cdot C_4^1}{C_5^1 \cdot A_3^3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 4} = 0.48$$

首位不能取0. 十位百位顺序 A_5^2 . $C_2^1 \cdot A_3^2 = \langle 5 \dots \rangle$ $C_2^2 \cdot C_4^1 = \langle 4 \dots \rangle$

4. $B = \{\text{系统可靠}\}$. $A_i = \{\text{元件} i \text{可靠}\}$. $i=1, 2, 3, 4, 5$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_3) P(\bar{A}_4 \bar{A}_5)$$

$$= 1 - (1-p^2)(1-p)(1-p^2) = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5$$

$$5. (1) P(A) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

$$(2) P(B) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

<第二章> <随机变量>

一、随机变量

1. 概念: 样本空间上的单值实值函数. 记 $X=X(\omega)$ 为随机变量

分类: 离散型、连续型.

高+连≠全部.

注: 如果 $F(x)$ 不连续, $F(x)$ 不是连续型, 也不是离散型, $F(x)$ 仍可能是某种变量的分布函数.
!(396真题中不是这样的. 高+连=全部!)

2. 描述方法

(1) 分布函数: $F(x) = P\{X \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$. 分布函数的函数值是一个概率: 随机事件 $X \leq x$ 的概率.
由 x 决定.

性质 ① 充要条件: 1° $F(x)$ 单调不减 Δ

2° $0 \leq F(x) \leq 1$. 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

3° $F(x)$ 右连续 注意与分布函数时区间“左闭右开”.

② 特殊性质: 1° $P(X=x) = F(x) - F(x-0) \Rightarrow P(X=1) = F(1) - \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$

2° $P(X < x) = F(x-0)$

$\Rightarrow$ 当 $a < b$ 时, $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b-0) - F(a)$

对于普通的随机变量,
等号取与不取要分清! $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b-0) - F(a-0)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a-0)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a).$

(2) 分布律(离散型). 称 $P(X=x_k) = p_k (k=1, 2, \dots)$ 为 X 的分布律.

当 X 的取值为有限个或可列无限个.

Δ 写分布律. step 1: 写出所有可能的取值. step 2: 对应的概率.

可用表格形式:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

性质: ① $p_k \geq 0, k=1, 2, \dots$ (非负性)

(充要条件) ② $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. (归一性).

(3) 概率密度(连续型): 存在非负函数 $f(x)$, 对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

则称 X 为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度.

性质 ① 充要条件: 1° $f(x) \geq 0$ (非负性)

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (归一性).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{可导, } f(t) \text{ 连续} \\ \text{连续, } f(t) \text{ 可积} \end{array} \right.$$

$\therefore F(x)$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 连续但不一定可导.

② 特殊性质: 1° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$

可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Leftarrow$ 2° $F(x)$ 是连续函数 $\Leftarrow$ 若 X 为连续型随机变量

3° 对于任意实数 c , $P\{X=c\} = 0$

(连续型随机变量的概率计算时加一个点/少一个点对结果无影响.)

$$P\{a < X < b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\}.$$

$$4^\circ \text{ 对任意实数 } a, b (a \leq b), P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

$\Rightarrow$ 哪儿求概率用积分.

$$\Delta F(x) \Leftrightarrow f(x)$$

$$\text{用 } f(x) \text{ 求 } F(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{用 } F(x) \text{ 求 } f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Δ 不是所有随机变量都有分布律或概率密度.

$$\Delta \text{ 最简单的形式: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

二、常见的随机变量

(1) 离散型: ① (0-1) 分布

$$\begin{array}{c|c|c} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$$

② 二项分布 (独立重复试验)

1° n 重伯努利试验 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ 每次试验有且只有 2 种结果} \\ 2) \text{ 独立重复 } n \text{ 次试验} \end{array} \right.$

2° 在 n 重伯努利试验中, 记成功的概率为 p , X 为成功的次数.

则 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$.

$$3^\circ \text{ 分布律 } P\{X=k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

③ 几何分布

1° 背景: 进行伯努利试验直至第 1 次成功时试验的次数.

$$2^\circ \text{ 分布律 } P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

3° 记作 $X \sim G(p)$, p 为成功的概率.

① 泊松积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 记住!

忘记的话,有些题目答案会算不出!

② $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! \Rightarrow$ 简化计算!

牢记 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$!

④ 泊松分布: 1° 记作 $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

2° 分布律: $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\dots, \lambda > 0$.

(连续型).

① 均匀分布 1° 记作 $X \sim U(a,b)$

2° 性质: X 落入 $[a,b]$ 中每个点的可能性相同

3° 概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$

4° 性质: 概率 = 长度比 = $\frac{\text{所求概率与正密度区间交集的长度}}{\text{正密度区间的长度}}$.

$P\{c < X < d\} = \frac{X \sim U(a,b)}{L[(c,d) \cap (a,b)]} = \frac{b-a}{b-a}$ 减少计算时间.

② 指数分布 1° 记作 $X \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$

记住 $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$ 2° 性质: 表示寿命

$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$ 3° 概率密度 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (x > 0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

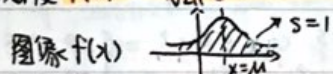
$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$

$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4° 性质: 无记忆性. $t > 0, s > 0, X \sim E(\lambda) \Rightarrow P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > t\}$

③ 正态分布 1° 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2° 概率密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.



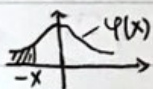
分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$.

3° 当 $\mu=0, \sigma^2=1$ 时, 标准正态分布 $X \sim N(0,1)$.

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4° 标准化. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

对称性



$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$
 $\Rightarrow \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.



$\Phi(x)$

是单调增的.

(表示面积).

对称性计算更快!

① 离散型: ① X 为离散型. $Y = g(X)$ 也是离散型.

写出 Y 的取值, 再算概率即可

$Y: \dots \leftarrow$ 分布律

② $P(X = x_k) = p_k$ 已知. 写出分布函数.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n, & x_n \leq x < x_{n+1} \end{cases}$$

概率累加.

注意等号都取成区间的左端点.

用 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 肯定累加!

② 连续型:

① 利用 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. 已知 $f(x)$ 求 $F(x)$.

由于 $f(x)$ 为分段函数, 根据 x 的范围分段计算 $F(x)$.

Δ (其实就是将 $\int_{-\infty}^x f(t) dt$. $(-\infty, x)$ 这个区间切分, 并逐渐累加起来).

② 已知 X 的概率密度 $f(x)$, 随机变量 $Y = g(X)$.

利用分布函数法计算 $f(y)$ 的一般思路:

Step 1: 根据 X 的取值范围确定 $Y = g(X)$ 的取值范围. 从而确定 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

等于 0 或 1 的范围.

Step 2: 对于其他范围内的 y . 可以解不等式 $g(X) \leq y$. 转化为求 X 落在某范围的概率! (此时注意 X 有间断范围).

$$\text{例如: } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \begin{cases} 0, & y < a \\ P\{c(y) \leq x \leq d(y)\} = \int_{c(y)}^{d(y)} f(x) dx, & a \leq y < b \\ 1, & y \geq b \end{cases}$$

<错题·核心笔记·第二章·随机变量>

$$F_1(+\infty) = F_2(+\infty) = 1, \quad F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0.$$

1. 设 X_1, X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量, 概率密度为 $f_1(x), f_2(x)$, 分布函数为 $F_1(x), F_2(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = 1.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = 1 + 1 = 2 \neq 1. \quad A \times$$

A. $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

$$\text{设 } f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

B. $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

$$\therefore f_1(x) \cdot f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

C. $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} \neq 1. \quad B \times$$

D. $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) + F_2(x)] = 2 \neq 1 \quad C \times$$

$F_1(x)F_2(x)$ 满足 $-\infty = 0, +\infty = 1$. 非降. 右连续.

2. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow \text{有对称性}$$

为 $[-1, 3]$ 上的均匀分布的概率密度. 若 $f(x)$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \rightarrow \text{无对称性}$$

$= \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} (a > 0, b > 0)$ 为概率密度.

则 a, b 满足

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 af_1(x) dx + \int_0^{+\infty} f_2(x) dx$$

$$A. 2a + 3b = 4.$$

$$B. 3a + 2b = 4$$

$$= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b.$$

$$C. a + b = 1$$

$$D. a + b = 2.$$

$$\therefore B.$$

3. 设 $X \sim U(0.4, 2.3)$. 令 $Y = [X]$ (其中 $[x]$ 表示 x

$$3. P\{Y=0\} = P\{0.4 \leq X < 1\} = \frac{1-0.4}{2.3-0.4} = \frac{6}{19}$$

的整数部分, 即不超过 x 的最大正整数, 试求

$$P\{Y=1\} = P\{1 \leq X < 2\} = \frac{2-1}{2.3-0.4} = \frac{10}{19}$$

Y 的分布.

$$P\{Y=2\} = P\{2 \leq X < 2.3\} = \frac{2.3-2}{2.3-0.4} = \frac{3}{19}.$$

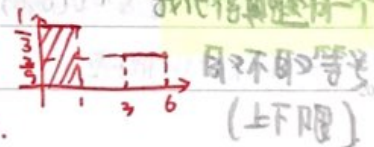
4. 设随机变量 X 的 $f(x)$ 为 $\begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$4. P\{X < K\} = \frac{1}{3} = \int_{-\infty}^K f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore 1 \leq K \leq 3.$$

若 K 使得 $P\{X \geq K\} = \frac{2}{3}$, 则 K 的取值范围是

$$\text{图己的方法} \Rightarrow \text{画图} \quad S = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq K \leq 3.$$



5. 设 x 为连续型随机变量, $F(x)$ 为 x 的分布函数, 则 $f(x)$ 在其定义域一定为 ()

5. $F(x)$ 必连续.

但 $F(x)$ 不一定可导.

得连续可导

A. 非=阶间断函数. B. 阶函数

C. 可导函数.

D. 连续但不一定可导函数.

$$\text{例如 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad x=1 \text{ 处不导.}$$

选 D.

6. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ or } x \geq 1 \\ 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 6-6x, & 0.5 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ 求随机变量 } X \text{ 的分布函数.}$$

6. 利用 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 计算, 由于 $f(x)$ 为分段函数,

$F(x)$ 也要分段计算.

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 0.5 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2t dt = x^2$$

$$\text{当 } 0.5 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{0.5} 2t dt + \int_{0.5}^x (6-6t) dt$$

$$= 6x - 3x^2 - 2$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } F(x) = 1.$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 0.5 \\ 6x - 3x^2 - 2, & 0.5 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

7. 设随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 内的均匀分布, 随机变量

$Y = -\ln X$, 求 Y 的概率密度.

$$X \sim U(0, 1) \quad Y = -\ln X \in (0, +\infty).$$

$$\text{当 } y < 0 \text{ 时, } F(y) = 0.$$

$$\text{当 } y > 0 \text{ 时, } F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{-\ln X \leq y\}$$

$$= P\{X \geq e^{-y}\} = 1 - e^{-y} \quad \text{用长度比!}$$

$$\therefore F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

$$\therefore f(y) = F'(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

8. 随机变量 $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(2\lambda)$, $P\{X < 1\} = \frac{1}{5}$

求 $P\{Y \geq 1\}$.

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

$$P\{Y = k\} = \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}.$$

$$\frac{1}{5} = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = e^{-\lambda}.$$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y < 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - e^{-2\lambda} = \frac{24}{25}.$$

9. 设随机变量 $X \sim U(0, 6)$. 试求方程 $t^2 + Xt + 2$

$= 0$ 有实根的概率.

$$P\{\Delta \geq 0\} = P\{X^2 \geq 8\} = P\{X \geq 2\sqrt{2} \cup X \leq -2\sqrt{2}\}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{2}}{6} \quad \text{长度比=概率比! 赶快!}$$

10. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则 $P(X > \frac{1}{\lambda}) =$.

$$X \sim E(\lambda) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$P(X > \frac{1}{\lambda}) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = e^{-1}.$$

等差数列求和 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$.

等比数列求和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

No.

Date

<错题> <数学分析偏解> 第1章 随机变量及其分布

1. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{c\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

($k=1, 2, \dots$), 且 $\lambda > 0$, 求常数 c

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} c \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1.$$

$$\because \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1. \therefore c(1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}) = 1$$

$$\therefore c = (1 - e^{-\lambda})^{-1}.$$

2. 求以什么常数将 e^{-x^2+x} 变成概率密度函数?

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-x^2+x} dx = 1 \text{ 即 } c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2} e^{\frac{1}{4}} dx = 1$$

$$\therefore c e^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\pi} = 1 \therefore c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}}.$$

$$\text{归一化积分 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

我读得不会考这么难! 考到 $\rightarrow$ 放弃!

*3. 假设某地在任何长为 t 年的时间间隔内发生

地震的次数为 $N(t)$ 服从 $\lambda=0.1$ 的泊松分布,

X 表示连续两次地震之间相隔的时间. 求

(1) 证明 X 服从指数分布并求出 X 的概率密度.

(2) 今后3年内再次发生地震的概率

(3) 今后3年至5年内再次发生地震的概率.

4. 设 $X \sim U(a, b)$. 令 $Y = cX + d$. 试求 Y

的概率密度.

$$3(1) \text{ 当 } t \geq 0 \text{ 时, } P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-0.1t}.$$

$$\therefore F(t) = P\{X \leq t\} = 1 - P\{X > t\} = 1 - e^{-0.1t}.$$

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } F(t) = 0.$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.1x}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$t \geq 0$.
在 t 时间内发生地震.
 $t < 0$
没有发生地震.

$$(2) F(3) = 1 - e^{-0.3} \approx 0.26.$$

$$(3) F(5) - F(3) \approx 0.13.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{若 } c > 0. \quad F(Y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-d}{c}\} \\ = \frac{\frac{y-d}{c} - a}{b-a}$$

$$\text{此时 } f(y) = \frac{1}{c(b-a)}, \quad ca + d \leq y \leq cb + d.$$

$$\text{当 } c < 0 \text{ 时, } F(Y) = P\{X \geq \frac{y-d}{c}\} = \frac{b - \frac{y-d}{c}}{b-a}$$

$$\text{此时 } f(y) = \begin{cases} -\frac{1}{c(b-a)}, & cb + d \leq y \leq ca + d. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

5. $P\{X=k\} = c\lambda^k e^{-\lambda}/k! \quad (k=0, 2, 4, \dots)$ 是 X

$\lambda > 0$.

的概率分布, 则 λ, c 一定满足

而 k 为偶数, λ 可为负.

A. $\lambda > 0$. B. $c > 0$. C. $\lambda > 0$. D. $c > 0$ 且 $\lambda > 0$.

选 B.

<第三章> 数字特征

一、数学期望

(1) 离散型. $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 取值, 概率, 再求和

$$\Rightarrow E\{g(x)\} = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

Δ 若 $Y=X^2$, 求 $E(Y)$.

直接把 $y=x^2$ 算出来

$$E(Y) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3.$$

(2) 连续型 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$\Rightarrow E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Δ 若 $f(x)$ 为分段函数,

则将 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 区间分段相加计算

数学期望的性质: (1) $E(c) = c$

$$(2) E(cX) = cE(X)$$

$$(3) E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

二、方差 $D(X) = \text{Var}(X) = E\{[E(X)-X]^2\}$ 标准差 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

方差的性质: (1) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = EX^2 - (EX)^2$. $\Rightarrow \Delta$ 求 $D(X)$ 时.

$$(2) D(c) = 0$$

EX^2

EX 分步骤算!!!

$$(3) D(cX) = c^2 D(X)$$

三、常见随机变量的 $E(X)$ 和 $D(X)$.

1. (0-1) 分布. $P\{X=k\} = p^k \cdot q^{1-k} (k=0,1), (0 < p < 1, p+q=1).$ $EX = p$ $DX = pq$

2. 二项分布 $P\{X=k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} (k=0,1,2,\dots,n)$ $EX = np$ $DX = npq$
 $X \sim B(n, p)$

3. 几何分布 $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p (k=1,2,\dots,n).$ $EX = \frac{1}{p}$ $DX = \frac{1-p}{p^2}$
 $X \sim G(p).$

忘记

4. 泊松分布 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k=0,1,2,\dots, \lambda > 0).$ $EX = \lambda$ $DX = \lambda$
 $X \sim P(\lambda), (\lambda > 0).$

5. 均匀分布 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $EX = \frac{a+b}{2}$ $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$
 $X \sim U(a,b).$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

6. 指数分布 $X \sim E(\lambda) (\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Gx = \frac{1}{\lambda}$$

$$Dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

7. 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$Gx = \mu.$$

$$Dx = \sigma^2.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$X \sim N(0, 1).$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

<核心笔记> <例题> <数字特征>

1. 袋中有2个白球3个黑球, 每次从袋中任取一个球, 直到取得白球为止, 放回. 求 $E(X)$

1. 每次取白球概率为 $\frac{2}{5}$.
 $X \sim G(\frac{2}{5})$. $\therefore E(X) = \frac{5}{2}$

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$

试求 $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{2} e^x dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{4} e^{-\frac{1}{2}(x-1)} dx = \frac{15}{2}.$$

3. 流水线上每个物品不合格率为 λ ($\lambda > 0$), 各产品合格与否相互独立. 当出现一个不合格产品时停机检修. 设开机后第一次停机时已产生了产品个数为 X . 求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

3. $X \sim G(\lambda)$. $\lambda > 0$.

$$\therefore E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}.$$

4. 设 $X \sim G(\lambda)$. 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} = \underline{\hspace{1cm}}$.

4. $D(X) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}$.

$$P\{X > \sqrt{D(X)}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有 ()

$$\int_0^a \varphi(x) dx \stackrel{a > 0}{=} \int_0^a \varphi(-t) dt \stackrel{\varphi(-t) = \varphi(t)}{=} \int_0^a \varphi(t) dt.$$

A. $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$

B. $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$

$\therefore F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{-a} \varphi(x) dx$

C. $F(-a) = F(a)$

D. $F(-a) = 2F(a) - 1$

$= \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx.$

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x}}, & \text{若 } x \in [1, 8] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 6. 当 $x < 1$, $F(x) = 0$. 当 $x > 8$, $F(x) = 1$.

当 $x \in [1, 8]$, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{3\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1.$

$F(x)$ 是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数.

当 $y < 0$ 时, $G(y) = 0$. 当 $y \geq 1$ 时, $G(y) = 1$.

$$y \in [0, 1] \text{ 时, } G(y) = P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\} = P\{\frac{2}{3}\sqrt{X} - 1 \leq y\} = P\{X \leq (y+1)^2\}$$

代入 $F(x) \Rightarrow F(y+1)^2 = y.$

$$\therefore G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

计算 $E(X), D(X)$ 看 $f(x) \cdot x$ 的奇偶性!

$$\text{泊松积分 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

<标题><数学高分><第十一章><随机变量特征函数>

次数 =

$$1. X \text{ 的 } f(x) = \begin{cases} cxe^{-kx^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(1) 求 c (2) $F(x)$ (3) $D(X)$.

$$1. (1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow c = 2k^2.$$

$$(2) F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 2k^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx.$$

$$\text{令 } kx = t, I = 2 \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot \frac{1}{k} dt \\ = \frac{2}{k} \int_0^{+\infty} -\frac{t}{2} de^{-t^2} = -\frac{1}{k} (te^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt) = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$(3) E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2k^2 x e^{-kx^2} dx \\ = 2k^2 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-kx^2} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-kx^2} \\ = -(x^2 e^{-kx^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} d(kx^2)) \\ = -\frac{1}{k^2} e^{-kx^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}. \therefore D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \\ = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

2. 对于任意随机变量 X , 若 $F(X)$ 存在, 则2. 把 $E(X)$ 看作常数. $E[F(E(X))]$ 等于

C.

A. 0 B. X C. $E(X)$ D. $(E(X))^3$ 3. $X \sim P(\lambda), E(X^2) = 6$, 则 $P\{X > 1\} = \underline{\quad}$.

$$3. b = E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \lambda + \lambda^2$$

$$\therefore \lambda = 2.$$

$$\therefore P\{X > 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} = 1 - 3e^{-2}.$$

4. 设 $X \sim U(a, b), E(X) = 2, D(X) = \frac{1}{3}$.

$$4. E(X) = 2 = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{1}{3} = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow a=1, b=3.$$

求 $a = \underline{\quad}, b = \underline{\quad}$.5. 设随机变量 $X, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

$$5. E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0. \text{ 别偷懒!}$$

求 $E(X), D(X)$.因为 $e^{-|x|}$ 为偶函数, $x e^{-|x|}$ 为奇函数

$$D(X) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(3) = 2! = 2.$$

$$6. \xi \text{ 的 } F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x \geq a \\ 0, & x < a. \end{cases} \quad a > 0$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{3a^3}{x^4}, & x \geq a \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

求 $E(\xi), D(\xi)$.

$$E\xi = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{x^2} dx = \frac{3}{2} a.$$

$$E\xi^2 = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{x^2} dx = 3a^2 \quad D\xi = \frac{3}{4} a^2.$$

7. 已知分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ a + b \arcsin x, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

求 a, b 及 $G(\frac{1}{2}), D(\frac{1}{2})$.

7. $a - \frac{\pi}{2}b = 0, a + \frac{\pi}{2}b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi}$.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$E\xi = \int_{-1}^1 \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. 奇函数.

$E\xi^2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \frac{1}{2}$
(点*)

$\therefore D\xi = \frac{1}{2}$.

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{15}{16} x^2 (x-2)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求 EX, DX .

8. $EX = \int_0^2 \frac{15}{16} x^2 (x-2)^2 dx = \frac{15}{16} (\frac{x^6}{6} - \frac{4}{3} x^5 + \frac{4x^4}{4}) \Big|_0^2 = 1$.

$EX^2 = \frac{8}{7}$

$DX = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$

9. 设 ξ . $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6^2} e^{-\frac{x^2}{26^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

其中 $6 > 0$ 为常数. 求 $E(\xi), D(\xi)$.

9. $EX = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{6^2} e^{-\frac{x^2}{26^2}} dx$

令 $\frac{x}{\sqrt{26}} = t \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cdot 26^2}{6^2} e^{-t^2} \cdot \sqrt{26} dt$
 $= 2\sqrt{26} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$

$= 2\sqrt{26} \left(\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \right) = -\sqrt{26} (t \cdot e^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt)$
 $= +\sqrt{26} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{6\sqrt{2\pi}}{2}$

$E(x^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{6^2} e^{-\frac{x^2}{26^2}} dx = 26^2$

$\therefore DX = \frac{4 \cdot \pi}{2} 6^2$