

396 必背公式——线代篇

数字型行列式

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ a_n & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & * & a_1 \\ * & * & a_2 & 0 \\ * & \ddots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

(2) 设 A 是 m 阶方阵, B 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

$$(3) \text{范德蒙行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

抽象型行列式

设 A, B 为 n 阶方阵, 则

$$(1) |A^T| = |A|$$

$$(2) |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$(3) |AB| = |BA| = |A||B|, |A^k| = |A|^k$$

$$(4) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(5) |A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

克拉默法则

如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
 的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, 则

方程组 (1) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是把系数行列式 D 中第 j 列用常数项代替后所得的 n 阶行列式.

矩阵的转置

$$(1) (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(2) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(3) (\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$$

$$(4) (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

伴随矩阵

$$(1) \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$$

$$(2) (k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^* (n \geq 2)$$

$$(3) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$$

$$(4) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1} (n \geq 2)$$

$$(5) (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}$$

$$(6) (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$$

$$(7) (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A} (n \geq 3)$$

可逆与不可逆

n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}^*, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^T$ 均可逆 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 等价
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 只有 0 解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的列(行)向量组线性无关

n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 不可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 有非 0 解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的列(行)向量组线性相关

可逆矩阵

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵, 则

$$(1) (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(2) \text{若 } k \neq 0, \text{ 则 } (k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(3) \mathbf{AB} \text{ 可逆, 则 } (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(4) \mathbf{A}^T \text{ 可逆, } (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(5) |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$$

矩阵秩的性质

- (1) $0 \leq r(\mathbf{A}_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}.$
- (2) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) = r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) (k \neq 0)$
- (3) $\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
- (4) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
- (5) $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$
- (6) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}), r(\mathbf{BA}) = r(\mathbf{B})$
- (7) 若 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times s} = \mathbf{O}$, 则 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$
- (8) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵 ($n > 2$), 则 $r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\mathbf{A}) = n \\ 1, & r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$

矩阵的等价

- (1) 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\mathbf{B}$, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价, 记 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$
- (2) 若存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$, 就称矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 等价。

线性表示

- (1) 向量组 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
- $\Leftrightarrow$ 存在数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$
 - $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(A, \beta)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$
- (2) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
- $\Leftrightarrow \beta_j$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, $j = 1, 2, \dots, t$
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$
- (3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价
- $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能互相线性表示
 - $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$
 - $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且 $r(A) = r(B)$

线性相关性

- (1) 线性相关
- n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关
- $\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$
 - $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 有非零解
 - $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可由其余向量线性表示
 - $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m$
 - $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| = 0$
- (2) 线性无关
- n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关
- $\Leftrightarrow$ 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 则必有 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$
 - $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 只有零解
 - $\Leftrightarrow$ 任一向量都不能由其余向量线性表示
 - $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$
 - $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m| \neq 0$

线性相关常用结论

(1) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，但向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 必可有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出，且表出方式唯一。

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 部分组线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 整体线性相关；若整体向量组线性无关，则部分向量组也线性无关。(简记：**部分相关，整体相关；整体无关，部分无关**)

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，则其延伸组线性无关；若延伸组线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关。(简记：**低维无关，高维无关；高维相关，低维相关**)

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出，且 $m > t$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关。

线性方程组解的个数

(1) 齐次方程组 $AX=0$

只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$

有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$

(2) 非齐次方程组 $AX=b$

无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(A, b)$

有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n$

有无穷解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n$

线性方程组解的性质

- (1) 若 ξ_1, ξ_2 是 $AX=0$ 的解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解
- (2) 若 η_1, η_2 是 $AX=b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应 $AX=0$ 的解
- (3) 若 ξ 是 $AX=0$ 的解, η 是 $AX=b$ 的解, 则 $\eta + \xi$ 是 $AX=b$ 的解

线性方程组解的结构

(1) 若 $r(A)=r$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则 $AX=0$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意常数})$$

(2) 若 η^* 是 $AX=b$ 的一个特解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则 $AX=b$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^* \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \text{ 是任意常数})$$