

396 必背公式——概率论篇

事件的运算律

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- (3) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (5) 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$
- (6) 双重否定律: $\overline{\overline{A}} = A$
- (7) 差积转换律: $A - B = A \overline{B}$

概率的五大运算公式

- (1) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

若 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

- (2) 减法公式: $P(A - B) = P(A \overline{B}) = P(A) - P(AB)$

若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(B) \leq P(A)$

- (3) 乘法公式

若 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

三个事件的乘法公式: $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

(4) 全概率公式

设有事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，如果满足 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥，且 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组。

设 E 为随机试验， Ω 是其样本空间， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组， B 是试验 E 的任一个随机事件，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ，则有

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

(5) 贝叶斯公式

设 E 为随机试验， Ω 是其样本空间， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组， B 是试验 E 的任一个随机事件，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ， $P(B) > 0$ ，

$$\text{则有 } P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

事件的独立性

A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

$$A, B, C \text{ 两两独立} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C). \end{cases}$$

$$A, B, C \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

二次概率公式

在 n 重伯努利试验中, 设每次试验中事件 A 发生的概率 $P(A) = p (0 < p < 1)$ 。

则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为:

$$B_k(n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

五个常见的离散型分布

(1) 0-1分布 $X \sim B(1, p)$

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad (k = 0, 1)$$

$$EX = p, \quad DX = p(1-p)$$

(2) 二项分布 $X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$EX = np, \quad DX = np(1-p)$$

(3) 泊松分布 $X \sim P(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda > 0) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda$$

(4) 几何分布 $X \sim G(p)$

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p \quad (0 < p < 1) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$EX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}$$

(5) 超几何分布 $X \sim H(N, M, n)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad (k = 0, 1, \dots, \min\{n, m\})$$

三个常见的连续型分布

(1) 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(2) 指数分布 $X \sim E(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) 正态分布

① 一般正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

$$EX = \mu, \quad DX = \sigma^2$$

② 标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

性质: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(0) = \frac{1}{2}$; $P\{|X| \leq a\} = 2\Phi(a) - 1$

二维离散型随机变量

(1) 联合概率分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\textcircled{1} p_{ij} \geq 0 \quad \textcircled{2} \text{规范性: } \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

(2) 边缘分布律

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i\bullet} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$P(Y = y_j) = P(X < +\infty, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{\bullet j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) 条件分布

对于给定的 j , 若 $P(Y = y_j) > 0$;

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \quad (i = 1, 2, \dots) \text{ 为在条件 } Y = y_j \text{ 下随}$$

机变量 X 的条件概率分布;

对于给定的 i , 若 $P(X = x_i) > 0$;

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \quad (j = 1, 2, \dots) \text{ 为在条件 } X = x_i \text{ 下随}$$

机变量 Y 的条件概率分布;

期望的常见性质

$$(1) E(C) = C, E(EX) = EX;$$

$$(2) E(CX) = CE(X);$$

$$(3) E(k_1X \pm k_2Y) = k_1EX \pm k_2EY;$$

$$(4) \text{若 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, 则有 } E(XY) = EXEY.$$

方差的常见性质

$$(1) D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0;$$

$$(2) D(CX) = C^2DX;$$

$$(3) D(C_1X + C_2) = C_1^2D(X);$$

$$(4) \text{若 } X, Y \text{ 相互独立, 则 } D(X \pm Y) = DX + DY.$$

两个常用方差计算公式

$$(1) DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$(2) EX^2 = DX + (EX)^2$$

常见随机变量的期望和方差

分布名称	记法	期望	方差
0-1分布	$X \sim B(1, p)$	p	$1 - p$
二项分布	$X \sim B(n, p)$	np	$np(1 - p)$
泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$X \sim G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$
均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
指数分布	$X \sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2