

第一讲 行列式 4/11(I)

一、二阶行列式起步

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad a_{ij} \text{ 为行标 } i \text{ 为列标}$$

$$\text{记 } [a_{11} \ a_{12}] = \alpha_1 \quad [a_{21} \ a_{22}] = \alpha_2$$

$$S_{II} = l \cdot m \cdot \sin \theta = l \cdot m \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$= l \cdot m (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)$$

$$= l \sin \beta \cdot m \cos \alpha - l \cos \beta \cdot m \sin \alpha = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

结论: 2阶行列式为两个二维向量构成其值为平行四边形面积, 即为其几何背景

推广: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 即为 $\alpha_1(a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \ \alpha_2(a_{21} \ a_{22} \ a_{23}) \ \alpha_3(a_{31} \ a_{32} \ a_{33})$ 组成的平行六面体的体积

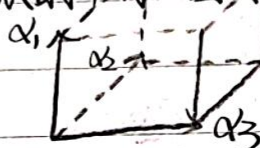
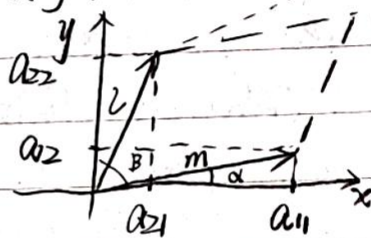
依次类推, n 阶行列式是以 n 个向量为

邻边 n 维图形的 n 维体积 m^n .

若 $|A| = 0$, 即测度为0, 故 $\sin(\beta - \alpha) = 0$, 即存在 α, α_2 共线, 线性相关.

or $l, m = 0$, 必存在0向量, 但0向量与任意均共线.

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ 向量线性无关



二、行列式的性质(北大)

性质1. 行列式互换其值不变. $|A| = |A^T|$. $\Rightarrow$ 其性质 $\sim$ 均可用于行列.

性质2. 行列式某行(列)全为0, 则 $|A| = 0 \Rightarrow$ 向量组线性相关.

性质3. 某行(列)有公因子 k ($k \neq 0$), k 则提到行列式外. $\Rightarrow$ 范乘

[注] $k \odot i$ 行乘 $k \quad k \vdash j$ 列乘 k .

性质4. 行列式中某行(列)元素均为两元素之和, 则可拆成两行列式之和即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11}+b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{单行可拆性})$$

[注] 当 A, B 只有对应的一行(列)不同时, 可单行相加. (称为测度)

性质5. 行列式中两行(列)互换, 值反号.

[注] (1) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ 行互换 $[i] \leftrightarrow [j]$ 列互换

(2) 互换性质

性质6 行列式两行(列)对应成比例, $|A|=0$

性质7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列), $|A|$ 不变 (倍加)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

三. 行列式的展开式 (计算必备)

1. 余子式 M_{ij} — $n-1$ 阶即降阶

2. 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 显然也有 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

3. 行列式展开式

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$ 即可求得 0 (行列式性质)

四. 几个重要的行列式

1. 主对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

2. 副对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{ni} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{ni} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \prod_{i=1}^n a_{i, n+1-i}$$

3. 范德蒙行列式

第一行 $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$

大列位置元素 - 小列位置元素

4. 列和或行和的行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \\ \vdots & b & \ddots & \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 (18) 求 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & b+a \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

分析 $|A| = a+b+c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a) \neq$

5. 拉普拉斯行列式

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B| = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$$

五. 例题 (1) 消0化三角形法 (2) 加边法 (3) 递推法 (4) 范德行列式

例1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 求 $|A|$

分析 $|A| = (n-1)(-1)^{n-1}$ (列和行列式)

例2 设 $A = \begin{bmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ \vdots & x+1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x & & & x+1 \end{bmatrix}$, 求 $|A|$

分析 $|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \text{(爪型)} \\ \searrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}n(n+1)x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{2}n(n+1)x+1 \right] = \left[\frac{1}{2}n(n+1)x+1 \right] / n!$$

例3 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1x_n & \cdots & & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$, 求 D_n

分析 加边法 $|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & D_n \\ 0 & \\ 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \text{(爪型)} \\ \searrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & & x_1x_n \\ \vdots & x_1x_2 & \ddots & \\ 0 & x_1x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -x_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$= (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

[例4] 计算 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$ (宽边行列式)

[分析] 用对角线递推法

$$D_5 = (1-x)D_4 - x \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)D_4 - x(-1)^3 x (-1D_3 + 0)$$

$$= (1-x)D_4 + xD_3$$

$$\therefore (D_5 - D_4) = -x(D_4 - D_3) = +x^2(D_3 - D_2) = -x^3(D_2 - D_1) = -x^5$$

$$\therefore \Delta \begin{cases} D_5 - D_4 = -x^5 & \Rightarrow D_5 = D_1 + x^2(-x^3 + x^2 - x + 1) \\ D_4 - D_3 = x^4 & = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ D_3 - D_2 = -x^3 & = -(x^3 - x^2 + 1)(x-1) \quad \times \end{cases}$$

$$D_2 - D_1 = x^2$$

[例5] 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} \quad (a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \neq 0)$

[分析] 蒙尧德蒙行列式

$$D_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i \right)^n \begin{vmatrix} 1 & b_1/a_1 & \dots & (b_1/a_1)^n \\ 1 & b_2/a_2 & \dots & (b_2/a_2)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_{n+1}/a_{n+1} & \dots & (b_{n+1}/a_{n+1})^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i \right)^n \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_j}{a_j} \right)$$

(按行减行) $\times$

第讲 矩阵

一、矩阵的定义及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数, 排成 m 行 n 列的矩形表格
称为一个 $m \times n$ 矩阵, 简记为 A 或 $(a_{ij})_{m \times n}$.

当 $m=n$, 称为 n 阶方阵, 亦叫 n 阶矩阵.

系数阵



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

↓ $|A|$ (若 $m=n$)

两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{s \times k}$, $m=s$ $n=k$ 则称为同型矩阵.

2. 矩阵的运算

(1) 相等. A, B 为同型矩阵, 且对应元素相同

(2) 加法. 同型矩阵, 对应元素相加. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

[注] 行列式的单行可加性. (证明)

(3) 数乘 k 为数 A 为矩阵 $kA = B$ $b_{ij} = k a_{ij}$.

即 A 中的每个元素均乘以 k .

$$\begin{pmatrix} 98 & 3 \\ 2 & 97 \end{pmatrix}$$

— 系统性信息

[注] $|k \cdot A| = k^n |A|$; $|k A_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$

$$A + (-1)B \triangleq A - B$$

(4) 乘法 设 $A_{m \times s}$ $B_{s \times n}$, 则 AB 可乘且为 $m \times n$.

[注] 记 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

则 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \triangleq (\alpha, \beta)$, 叫 α, β 的内积

内积必为同维列向量. (故行=列数)

$\therefore c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj}$, 即 α 行向量与 β 列向量做内积.

而乘法即为做 $m \times n$ 个内积的结果.

特别地 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_n)^T = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, 即内积.

(逆用) $\Delta (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \times (a_1, \dots, a_n) \triangleq n \times n$ 矩阵 (第 i 行均 $\times b_i$, i 行 $\times a_i$)

矩阵乘法运算规律

① 结合律 $(A_{m \times s} B_{s \times r}) C_{r \times n} = A_{m \times s} (B_{s \times r} C_{r \times n})$

② 分配律 $A_{m \times s} (B_{s \times n} + C_{s \times n}) = A_{m \times s} B_{s \times n} + A_{m \times s} C_{s \times n}$

$$(A_{m \times s} + B_{m \times s}) C_{s \times n} = A_{m \times s} C_{s \times n} + B_{m \times s} C_{s \times n}$$

③数乘与矩阵乘的结合律 $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

△[注] AB 矩阵一般不满足交换律 $AB \neq BA$ 相似对角化

[例1] 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 A^n (求 A^n)

[分析] (-)归纳法 $A^2 = 4E$ $A^3 = 4A$ $A^4 = 16E$

$$\therefore A^n = \begin{cases} 4^k E & n=2k \quad k \in \mathbb{Z} \quad * \\ 4^k A & n=2k+1 \end{cases}$$

[例2] 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 求 A^n

[分析] $A = [1 \ -2 \ 3]^T [1 \ 2 \ -1]$ (行成比例!)

$$\therefore A^n = [1 \ -2 \ 3]^T ([1 \ 2 \ -1] [1 \ -2 \ 3]^T)^{n-1} [1 \ 2 \ -1]$$

$$= (-6)^{n-1} A$$

记 $\alpha = (1 \ -2 \ 3)^T$ $\beta = (1 \ 2 \ -1)^T$ 代数中习惯写列向量

$$A = \alpha \beta^T \Rightarrow A^2 = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = -6A \therefore A^n = (-6)^{n-1} A \quad *$$

[注] 称 $\sum a_{ii} = \text{tr}(A)$, 迹的 A .

若 $r(A_{n \times n}) = 1$ (即 n 行元素均成比例), 则 $A^n = [\text{tr}(A)]^{n-1} A$.

如 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}^n = \left(-\frac{9}{2}\right)^{n-1} A$

[例3] 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^n

[分析] 若 $A = B + C$, C 为单位阵较好.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B + E$$
 交换故可二次项

$$\therefore A^n = (B + E)^n = C_n^0 E^n B^0 + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 + \dots + C_n^n E^0 B^n$$

具 $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^3 = 0$, 代入得.

$$A^n = E + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} *$$

二 初等变换法求 A^{-1} ① A 必为方阵 ($n \times n$) ② 定义 $AA^{-1} = E \Rightarrow A^{-1} = B \quad B^{-1} = A$

△ 1. 初等变换 ③ A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 向量线性无关

(1) 一个非 0 常数乘矩阵的某一行(列) 倍乘

(2) 互换矩阵中某两行(列)的位置 互换

(3) 将某行(列)的 k 倍加到另一行(列) 倍加 一方程的同解变换

例 1 化 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$ 为行阶梯矩阵

分析 行阶梯矩阵 ① 若有 0 行, 均在下方, 然后就不看他们了 ② 从行上看, 自左边起出现 0 的个数, 自上而下严格单增.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 化 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为行最简阶梯型矩阵

分析 行最简阶梯矩阵 ① 行阶梯矩阵 (E 一定为行最简阶梯矩阵) ② 台角位置元素为 1 行阶梯型矩阵一定为 E ③ 台角位置元素正上方元素均为 0

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * (5-3=2)$$

2. 用初等变换求逆矩阵的方法

$[A|E]$ 初等行变换 $[E|A^{-1}]$

Th 任何可逆矩阵 ($|A| \neq 0$) 一定可通过若干次初等行变换化为同阶单位阵

$$\text{即 } P_n \cdots P_1 A = E \Leftrightarrow P_n \cdots P_1 A A^{-1} = E A^{-1} \Leftrightarrow P_n \cdots P_1 E = A^{-1}$$

将 A, E 同时进行同时相等行换, $A \rightarrow E$ 时 E 变为 A^{-1} .

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} .

分析 $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$
 $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ & 1 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

第三讲 方程组 必考大题 11' $AP=B(18)$

一、齐次方程组的求解

$$\text{方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ 未知数矩阵}

称 m 个方程 n 个未知数的齐次方程组, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 叫系数矩阵

其矩阵形式为 $AX = 0$, 后者一般为未知量

其向量形式为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$

限制度 有解的条件 $r(A) = n$ (自由度) 一不含有无解的情况 $r(A) = n$ 独立向量的个数 即独立方程的个数

当 $r(A) < n$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关), (1) 有非 0 解, 且有 $n-r$ 个线性无关解

2. 解的性质

若 $AX_1 = AX_2 = 0$, 则 $A(k_1X_1 + k_2X_2) = 0$, 其中 k_1, k_2 为任意常数

3. 基础解系与解的结构

(1) 基础解系: 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ ① 是方程组 $AX=0$ 的解 ② 线性无关 ③ $AX=0$ 任意解均可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示 (n 维空间由 n 个线性无关向量张成)

(2) 通解: 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的通解, 其 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意常数

③ $S = n - r(A)$, S 为通解中成员个数

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

4. 求解方法 (程序)

(x_3, x_5) 张成了二维平面

① 将系数矩阵 A 化为阶梯矩阵 B (or 行最简阶梯二维平面可由两不平行向量构成矩阵), 初等行变换将方程组化为同解方程, 故 $AX=0, BX=0$

A 初等行变换 B ($r(B) = r$)

② 按列找出一个秩为 r 的子矩阵, 则剩余位置即为自由变量

③ 按照基础解系定义写出通解

例 11 求齐次线性方程组的通解

$$x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

x_3, x_4 — 自由变量
↓ ↓

分析 ① $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ (省略) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=3$
 $\delta=5-3=2$

秩为0

参数

② 按列找到一个秩为3的子矩阵

则 x_3, x_4 可作为自由变量 线性无关

③ $\begin{matrix} \beta_1 = (-1 & 1 & 0 & 0 & 0)^T \\ \beta_2 = (7 & 5 & 0 & 1 & 3)^T \end{matrix}$

通解为 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

解 $\left\{ \begin{matrix} \beta_1 = (-1 & 1 & 0 & 0 & 0)^T \\ \beta_2 = (7 & 5 & 0 & 1 & 3)^T \end{matrix} \right.$

二. 非线性方程组

方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T$ 自由项矩阵
 $AX = b \neq 0$

向量写法 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$ 令 $b=0 \Rightarrow$ (I) 称为 (II) 的导出组

矩阵写法 $AX = b$

称 $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 称为矩阵A的增广阵, 记为 $[A; b]$

1. 有解条件

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 少一维

若 $r(A) \neq r(A; b)$ (b 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示), 则无解.

若 $r(A) = r(A; b) = n$, ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关), 唯一解.

若 $r(A) = r(A; b) < n$, 则有无穷多的解.

2. 解的性质

设 η_1, η_2, η 为 $AX = b$ 解 ξ 为 $AX = 0$ 解

则 (1) $\eta_1 - \eta_1$ 为 $AX = 0$ 解 (2) $k\xi + \eta$ 为 $AX = b$ 解

3. 通解的结构

求对应齐次组的通解加上一个非齐次线性组的特解

例1 求解非齐次线性方程

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

并用对应齐次方程组基解系表示解。

分析 $(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ $r(A) = r(A|E) = 2 < 4$

无穷多解

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$\therefore$ 通解为 $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \xi^*$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

例2 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -6 \\ -x_1 - 9x_2 + 3x_4 = 15 \end{cases}$$

满足 $x_1 = x_2$ 的全部解

分析 满足 $x_1 = x_2$, 即原方程组添加 $x_1 - x_2 = 0$

$$(A|E) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A|E) = r(A) = 3 < 4$$

$S=1$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad \xi^* = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

通解为 $k\xi + \xi^* = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}^T + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \forall k$

令 $x_1 = x_2$, 即 $\frac{19}{14} - 9k = k - \frac{27}{14} \Rightarrow k =$

$$\xi = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad \xi^* = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

通解为 $k\xi + \xi^* = \begin{pmatrix} -12 - 9k \\ k \\ 10 + 7k \\ 1 \end{pmatrix}^T$

令 $x_1 = x_2$, 即 $-12 - 9k = k \Rightarrow k = -1.2$

$\therefore$ 满足 $x_1 = x_2$ 的解为 $(-1.2, -1.2, 6, 1)^T$

$$[\text{另解}] \text{ 令 } (B|E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -9 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.2 \\ -1.2 \\ 1.6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore r(B|E) = r(B) = 4$ 唯一解

$\therefore$ 满足条件的解为 $(-1.2 \ -1.2 \ 1.6 \ 1)^T$ #

[例1] (2018) 已知 a 为常数, 且 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(I) 求 a (II) 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P, γ

[解析] (I) 初等变换不改变矩阵的秩

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{另解 } |A| = 0 = |B| = a-2 \Rightarrow a=2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (P_1, P_2, P_3)$$

$$(II) \text{ 解 } AX_1 = P_1 \Rightarrow X_1, AX_2 = P_2, AX_3 = P_3$$

$$\therefore (A|B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad S=3-2=1$$

$$\text{基础解系 } (-6 \ 2 \ 1)^T = \xi_3$$

$$\text{对 } AX_1 = P_1 \quad \xi_1^* = (3 \ -1 \ 0)^T$$

$$\text{对 } AX_2 = P_2 \quad \xi_2^* = (4 \ -1 \ 0)^T = \xi_3^*$$

$$\therefore P = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \forall k_1, k_2, k_3$$

$$|P| = k_2 - k_3 \neq 0, \text{ 故 } k_2 \neq k_3. \quad \#$$

相似对角化

第四讲 特征值与二次型 只讲方阵 $A_{n \times n}$

一、特征值与特征向量的基本概念

设 A 为 n 阶矩阵, λ 为一个数, 若存在 n 维非 0 列向量, 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$

则称 λ 为 A 的特征值, α 为 A 对应 λ 的特征向量.

$$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)X = 0 \text{ (齐次方程组)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \text{ 为 } (\lambda E - A)X = 0 \text{ 的非 0 解} \xrightarrow{\text{有解}} |\lambda E - A| = 0 \text{ (特征方程)}$$

特征方程有 n 个 λ , n 个根

【例】求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【分析】 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 = \lambda_2, \lambda_3 = -1$

α 特征向量即为 $(\lambda E - A)X = 0$ 的解, 求其基础解系.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $(\lambda E - A)X = 0 \Leftrightarrow (E - A)X = 0$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=1 \quad s=3-1=2$$

$$\alpha_1 = (0 \ 1 \ 0)^T \quad \alpha_2 = (-1 \ 0 \ 1)^T$$

通解为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, $\forall k_1, k_2 \neq 0$ (排除 0 向量)

2. $\lambda_3 = -1$ $-\lambda E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=2 \quad s=1$

$$\alpha_3 = (-1 \ 0 \ 1)^T$$

通解为 $k_3\alpha_3$, $\forall k_3 \neq 0$. *

二、矩阵相似的定义

定义: 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 称 $A \sim B$.

——特征根相同即相似

三、相似对角化定义

定义: 若存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 为对角阵, 称 A 可相似对角化.

记 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型.

[注] $P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda \Leftrightarrow A(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow (A\xi_1 \ A\xi_2 \ \dots \ A\xi_n) = (\lambda_1\xi_1 \ \lambda_2\xi_2 \ \dots \ \lambda_n\xi_n) \Leftrightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i, i=1,2,\dots,n$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda \text{ 中的 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ 即为 } A \text{ 的特征值,} \\ P \text{ 中的 } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ 即为 } A \text{ 的特征向量} \end{cases} \quad \text{前提: } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ 线性无关}$
 $\Leftrightarrow P \text{ 可逆} \Leftrightarrow |P| \neq 0$

故 A 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \exists P, P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

四、求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda, \Leftrightarrow |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n| \neq 0$

即求 P 的特征值与特征向量.

例1 $A_{3 \times 3}$, 且 $A\xi_i = i\xi_i$, 其中 $\xi_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, \xi_2 = (1 \ 1 \ 0)^T, \xi_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$, 求 A .

分析 由定义可知 $(A\xi_i = \lambda_i\xi_i, \xi_i \neq 0)$,

$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3; \xi_1=(1 \ 0 \ 0)^T, \xi_2=(1 \ 1 \ 0)^T, \xi_3=(1 \ 1 \ 1)^T$

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |P| \neq 0$ (验证)

故 $P^{-1}AP = \Lambda$, 即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \#$

例2 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

分析 令 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -3 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)[\lambda(\lambda-2)-3] = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$

得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

数域实数域上

1. $\lambda_1 = -1$ 时 $\lambda E - A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_1 = (1 \ 0 \ -3)^T$

2. $\lambda_2 = 3$ 时 $3E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = (2 \ 1 \ 0)^T, \xi_3 = (1 \ 0 \ 1)^T$

∴ 存在 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

故 $A^{100} = P \Lambda^{100} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3^{100} & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
 $= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3^{101} & 2 \cdot 3^{100} - 2 & -1+3^{100} \\ 0 & 4 \cdot 3^{100} & 0 \\ 3^{101} - 3 & 6 - 6 \cdot 3^{100} & 3^{100} + 3 \end{pmatrix} \#$

五. 二次型定义及其矩阵表达式

n 元变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 元二次型.

若只研究 a_{ij} 为实数, 且为实二次型 $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ \vdots \\ + a_{nn}x_n^2$$

$x_i x_j$ $\begin{cases} \text{混合项 } i \neq j \\ \text{平方项 } i = j \end{cases}$

$$\therefore f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 \quad (3x_1x_2 + x_1x_2 = 2x_1x_2 + 2x_1x_2)$$

∴ 一个二次型对应有不同的表式方法. 即 $a_{ij} = a_{ji}$.

规定二次型的矩阵必须对称矩阵, 代表二次型的矩阵就唯一了.

[注例] 写出三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的二次型矩阵.

[分析] $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$
 $= x^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$ — 唯一

即平方项系数记在角线上, 混合项系数平分之后记在相应位置.

即二次型可表示为 $x^T A x$ ($A = A^T$).

对 A 相似对角化 (特征值特征向量), 即求标准形

即 $x^T A x = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ 把一般形化标准形.

六. 线性变换的定义

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

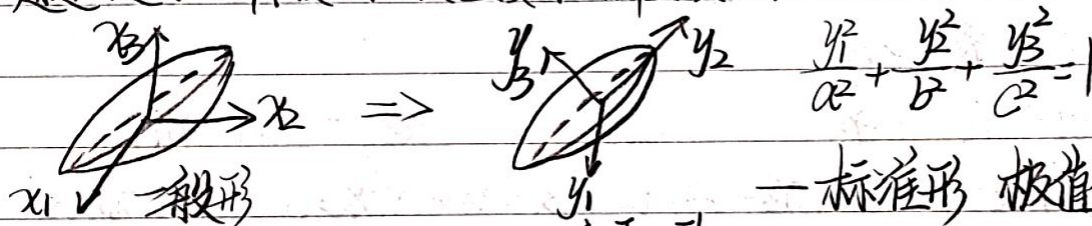
记 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$, 则 $x = Cy$ (参照物变换)
上式称为从 y 到 x 的变换

$f(x) \xrightarrow{x=Cy} g(y)$ 继续 $x=Cy$ x 的线性变换

若 C 可逆, 即 $|C| \neq 0$, 则称为可逆线性变换

$$f = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} y^T C^T A C y = y^T (\boxed{C^T A C}) y = y^T B y$$

通过上述 $x=Cy$, 使旧二次型变为一新二次型



$$C^T A C = B \Rightarrow C^T A C = \Lambda \xrightarrow{\text{若 } C^T = C^{-1}} C^{-1} A C^{-1} = \Lambda \text{ 相似对角化}$$

即 $C C^T = E$, 设 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $C C^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \alpha_1^T \alpha_3 \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \alpha_2^T \alpha_3 \\ \alpha_3^T \alpha_1 & \alpha_3^T \alpha_2 & \alpha_3^T \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位向量且两两相互正交 $C^T C = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \alpha_1^T \alpha_3 \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \alpha_2^T \alpha_3 \\ \alpha_3^T \alpha_1 & \alpha_3^T \alpha_2 & \alpha_3^T \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

若 P 为 n 阶矩阵, 且 $P P^T = E \Leftrightarrow P$ 为正交矩阵 单位 + 两两垂直

$$\Leftrightarrow P^T = P^{-1} \Leftrightarrow P \text{ 由规范正交基组成}$$

例1 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

(1) 写出二次型 f 矩阵表达式 (2) 用正交变换化 f 为标准型并写出正交阵

分析 (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $f = x^T A x$

$$(2) \textcircled{1} |\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda + 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$$

$$\lambda_3 = -6 \quad \eta_1 = (5, -1, 2)^T$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \eta_2 = (-2, 0, 1)^T$$

$$\lambda_2 = 6 \quad 6E - A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = (1, 5, 2)^T$$

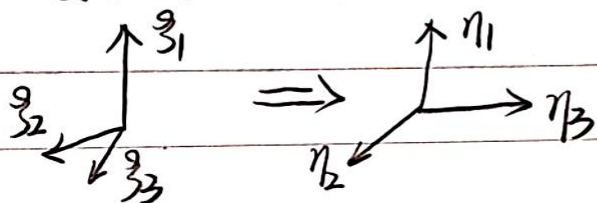
③ 写正交阵 P $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 线性无关 $\xrightarrow{\text{单位化}} \xrightarrow{\text{正交化}} P(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

若三特征值不同, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 必正交化.

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}, \quad \text{则 } P^T = P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } X = PY, \quad f &= (PY)^T A PY = Y^T (P^T A P) Y = Y^T (\underbrace{P^T A P}_{\Delta}) Y = Y^T \Delta Y \\ &= Y^T \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{pmatrix} Y = -6y_1^2 + y_2^2 + 6y_3^2 \quad \# \end{aligned}$$

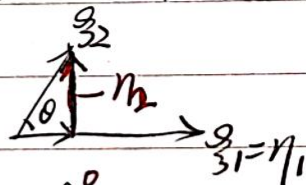
[注] 施氏正交法, $\mathbf{g}_1$ 与 $\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 正交但 $\mathbf{g}_2$ 与 $\mathbf{g}_3$ 不正交



$$\text{如 } A \Rightarrow \mathbf{g}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{g}_2 = (2, 0, 1)^T, \quad \mathbf{g}_3 = (1, 2, -2)^T$$

$$\text{易知 } \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3 = 0, \quad \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = -4 \neq 0.$$

$$\text{令 } \eta_1 = \mathbf{g}_1 = (-2, 1, 0)^T$$



$$\eta_2 = \mathbf{g}_2 - (\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) / \|\mathbf{g}_1\|^2 \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 - \|\mathbf{g}_2\| \cos \theta \eta_1$$

$$\therefore (\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) / \|\mathbf{g}_1\|^2 = -4/5 = -4/5 = -4/5$$

$$\therefore \eta_2 = \mathbf{g}_2 + \frac{4}{5} \eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \mathbf{g}_2 - \|\mathbf{g}_2\| \cos \theta \eta_1$$

令 $\eta_3 = \mathbf{g}_3$, 得 η_1, η_2, η_3 正交.