

目 录

模块一	实数	1
模块二	比和比例	3
模块三	绝对值	4
模块四	代数式	5
模块五	函数	7
模块六	方程	10
模块七	不等式	12
模块八	等差数列	14
模块九	等比数列	14
模块十	一般数列	14
模块十一	应用题	16
模块十二	计数原理	18
模块十三	概率	19
模块十四	数据描述	20
模块十五	平面几何	21
模块十六	空间几何体	24
模块十七	直线与圆的方程	25
模块十八	解析几何综合应用	27

模块一 实数

（一）有理数和无理数

1. 能表示为两个整数之商形式的实数称为有理数，不能表示为两个整数之商形式的实数称为无理数
2. 一个有理数和一个无理数的和、差为无理数
3. 一个非 0 有理数和一个无理数的积、商为无理数

（二）整数的除法

4. 能被 2（或 5）整除的数：末一位数字能被 2（或 5）整除
5. 能被 3（或 9）整除的数：各位数的数字之和能被 3（或 9）整除

（三）奇数与偶数

6. 两个整数做加减运算：同偶异奇
7. 若 m 、 n 均为整数，则 $m+n$ 与 $m-n$ 奇偶性相同
8. 两个整数做乘法运算：遇偶则偶
9. 若 n^k 、 $\sqrt{n}$ 、 $|n| \in \mathbb{Z}$ ，则其奇偶性与 n 相同

（四）质数与合数

10. 若 n 为 ≥ 2 且仅能被 1 和它本身整除的整数，则称 n 为质数（素数），否则称为合数
11. 2 是唯一的偶质数
12. 较小的质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37……
13. 质因数分解：所有的合数都能分解成若干个质因数相乘的形式， $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$

（五）公约数与公倍数

14. 设 m ， n 均为正整数，若 a 既是 m 的约数，又是 n 的约数，则称 a 为 m ， n 的公约数，所有公约数中最大者称为 m ， n 的最大公约数，记为 (m, n)
15. 设 m ， n 均为正整数，若 b 既是 m 的倍数，又是 n 的倍数，则称 b 为 m ， n 的公倍数，所有公倍数中最小者称为 m ， n 的最小公倍数，记为 $[m, n]$
16. 公约数与公倍数求解方法：短除法、质因数分解法

17. 设 m, n 均为正整数, 则 $m \times n = [m, n] \times (m, n)$

(六) 整系数不定方程

18. 特征: ①未知数的个数多于方程的个数; ②方程的系数均为整数; ③方程的解均为整数

19. 二元一次型: $ax + by = c$ (a, b, c, x, y 为整数);

求解方法: 整除法、尾数法、奇偶法

20. 二元二次型: $axy + bx + cy = d$ (a, b, c, d, x, y 为整数);

求解方法: 因式分解法

模块二 比和比例

1. 比的基本性质: $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ ($k \neq 0$)
2. 比例的基本性质: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
3. 等比定理: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_i}{b_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$ 且 $b_1 + b_2 + \dots + b_n \neq 0$)
4. 见比设 k : 若 $x:y:z = a:b:c$, 则可设 $x = ak$, $y = bk$, $z = ck$
5. 比例统一: ①找公共量的最小公倍数; ②找不变量的最小公倍数 (内部调整问题和外部调整问题)
6. 若三个量 x 、 y 、 z 满足 $xy = z$ ($z \neq 0$), 则存在如下正反比关系:
 - ① x 为定值时, 变量 z 与 y 成正比, 则 $\frac{z_1}{y_1} = \frac{z_2}{y_2}$ 或 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1}{y_2}$;
 - ② y 为定值时, 变量 z 与 x 成正比, 则 $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$ 或 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1}{x_2}$;
 - ③ z 为定值时, 变量 y 与 x 成反比, 则 $x_1 y_1 = x_2 y_2$ 或 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ 。

模块三 绝对值

1. $|a|$ 表示数轴上的点 a 到原点的距离, 故 $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$, 由此可知 $\begin{cases} |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0 \\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ |a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0 \end{cases}$

2. 当 $a \neq 0$ 时, 则称 $\frac{|a|}{a}$ 或 $\frac{a}{|a|}$ 为绝对值的自比式。

$\frac{ a }{a} = \frac{a}{ a } = \begin{cases} 1 & \text{正} \\ -1 & \text{负} \end{cases}$	$\frac{a}{ a } + \frac{b}{ b } = \begin{cases} 2 & \text{两正} \\ 0 & \text{一正一负} \\ -2 & \text{两负} \end{cases}$	$\frac{a}{ a } + \frac{b}{ b } + \frac{c}{ c } = \begin{cases} 3 & \text{三正} \\ 1 & \text{两正一负} \\ -1 & \text{两负一正} \\ -3 & \text{三负} \end{cases}$

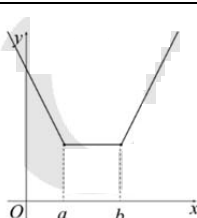
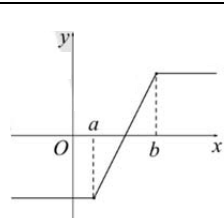
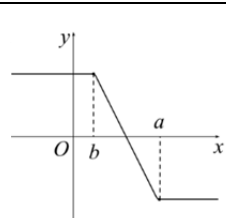
3. $|a|^2 = a^2$ (或 $\sqrt{a^2} = |a|$)

4. 基本不等式: $-|a| \leq a \leq |a|$

5. 三角不等式: $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

6. V 字型: 绝对值函数 $y = |kx - b|$ ($k \neq 0$) 的图像, 最小值为 $y_{\min} = 0$

7. 凹槽型和“Z”字型:

函数	$y = x - a + x - b $ 型	$y = x - a - x - b $ 型	
		$a < b$	$a > b$
图像			
性质	凹槽型; $y_{\min} = a - b $, 无最大值	“  ”型或“  ”型; 与 x 轴交点为 a 、 b 的中点; $y_{\min} = - a - b $, $y_{\max} = a - b $	

模块四 代数式

（一）整式乘法

1. 两个多项式相乘：交错相乘后合并同类项
2. 平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
3. 完全平方公式： $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
4. 三个数和的平方： $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
5. 完全平方公式变式： $\frac{1}{2}[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2]=a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca$
6. 立方和公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
7. 立方差公式： $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
8. 完全立方公式： $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

（二）整式除法

9. 余式定理： $f(x)=g(x)h(x)+r(x)$ ，若存在 a 使得 $g(a)=0$ ，则 $f(a)=r(a)$
10. 因式定理： $f(x)=g(x)h(x)$ ，若存在 a 使得 $g(a)=0$ ，则 $f(a)=0$

（三）多项式因式分解

11. 因式分解一般步骤：分组、提取公因式、使用公式
12. 拆项补项法：将多项式的某一项拆开，或者添加互为相反数的两项（或几项），使该多项式便于使用提取公因式法、运用公式法等方法进行因式分解
13. 十字相乘：借助十字相乘分解二次三项式的系数从而将其写成因式乘积的形式
14. 双十字相乘：对于形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 形式的多项式，通常采用双十字相乘进行因式分解

（三）分式裂项

15. $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$
16. $\frac{1}{x(x+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+k}\right)$

(四) 正负幂次对称分式

$$17. \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$18. \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

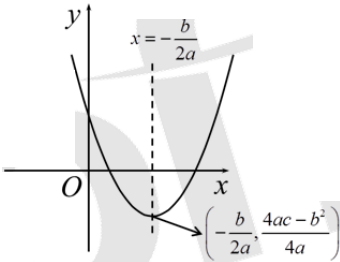
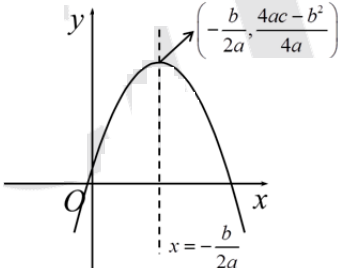
模块五 函数

(一) 集合

1. 元素的特征：确定性、无序性、互异性。
2. 子集： $A \subseteq B$ ；真子集： $A \subsetneq B$ ；相等： $A = B$
3. 交集： $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ；并集： $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

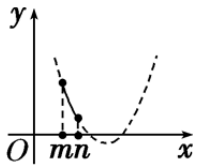
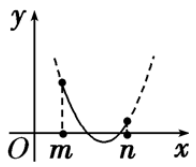
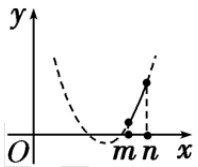
(二) 一元二次函数

4. 一般式： $y = ax^2 + bx + c$ ；顶点式： $y = a(x - h)^2 + k$ ；两点式： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ；
5. 性质

	$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	
a	$a > 0$	$a < 0$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
图像		
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
最值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y_{\min} = \frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y_{\max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$
值域	$\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$	$\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$
奇偶性	$b = 0$ 时, 偶函数; $b \neq 0$ 时, 非奇非偶函数	

单调性	在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 单调递减	在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 单调递增
	在区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 单调递增	在区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 单调递减

6. 区间最值：设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)

对称轴 与区间 的关系	$m < n < -\frac{b}{2a}$ 即 $-\frac{b}{2a} \in (n, +\infty)$	$m < -\frac{b}{2a} < n$ 即 $-\frac{b}{2a} \in (m, n)$	$-\frac{b}{2a} < m < n$ 即 $-\frac{b}{2a} \in (-\infty, m)$
图像			
最值	$f(x)_{\max} = f(m)$ $f(x)_{\min} = f(n)$	$f(x)_{\max} = \max\{f(n), f(m)\}$ $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$f(x)_{\max} = f(n)$ $f(x)_{\min} = f(m)$

(三) 指、对数函数

7. 指数运算法则：① $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)；

② $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ；

③ $a^x \div a^y = a^{x-y}$ ；

④ $(a^x)^y = a^{xy}$ ；

⑤ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

8. 对数运算法则：① $\log_a 1 = 0$ ， $\log_a a = 1$ ；

② $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ ；

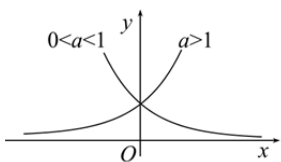
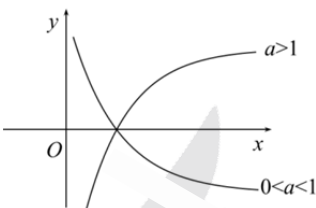
③ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ ；

$$\textcircled{4} \log_{a^x}(b^y) = \frac{y}{x} \log_a b ;$$

$$\textcircled{5} a^{\log_a N} = N$$

$$9. \text{换底公式: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\log_x a}$$

10. 指数函数与对数函数

类型	指数函数	对数函数
形式	$y = a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$	$y = \log_a x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
图像		
定义域	R	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	R
定点	$(0, 1)$	$(1, 0)$
单调性	当 $a > 1$ 时, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 当 $0 < a < 1$ 时, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减	当 $a > 1$ 时, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增 当 $0 < a < 1$ 时, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减

模块六 方程

(一) 二元一次方程组

1. 求解方法：代入消元法、加减消元法

(二) 一元二次方程

2. 求解方法：①配方法；②公式法；③十字相乘法

3. 根的判定： $\Delta = b^2 - 4ac$ 称为一元二次方程根的判别式。

①当 $\Delta < 0$ 时，方程无实根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实根；③当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实根

4. 韦达定理： x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, \Delta \geq 0$) 的两个根，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{该定理称为韦达定理}$$

5. 韦达定理的应用关键是构造 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ ，可用于求解以下代数式的值：

$$\textcircled{1} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2};$$

$$\textcircled{2} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2};$$

$$\textcircled{4} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2};$$

$$\textcircled{5} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$$

6. 根的分佈

- ①若 $x_1 < x_0 < x_2$ ，则 $af(x_0) < 0$ ；

$$\textcircled{2} \text{若 } x_0 < x_1 \leq x_2, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > x_0 \\ af(x_0) > 0 \end{cases}; \text{ 若 } x_0 > x_1 \geq x_2, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < x_0 \\ af(x_0) > 0 \end{cases};$$

$$\textcircled{3} \text{ 若 } \alpha < x_1 \leq x_2 < \beta, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \end{cases};$$

$$\textcircled{4} \text{ 若 } x_1 < \alpha < \beta < x_2, \text{ 则 } \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases};$$

$$\textcircled{5} \text{ 若 } \alpha < \beta \leq \gamma < \delta, \text{ 则 } \begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) < 0 \\ af(\gamma) < 0 \\ af(\delta) > 0 \end{cases}.$$

(三) 分式方程

7. 求解步骤：①找最简公分母；②验证增根

(四) 绝对值方程

8. 求解方法：①定义法；②零点分段讨论法；③几何意义；④图像法：结合绝对值函数图像进行求解

(五) 其他方程

9. 平方法：无理方程

10. 换元法：针对无理方程、指数方程、对数方程

模块七 不等式

(一) 不等式

1. 同向可加性: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

(二) 一元二次不等式

2. 求解方法: 二次项系数为正时, 大于号取两端, 小于号取中间

3. 不等式恒成立问题: ①若一元二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 恒成立, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$;

②若一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 恒成立, 则 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

4. 若题干当中没有明确表明是一元二次不等式, 则需要讨论二次项系数是否为0

(三) 其他不等式

5. 分式不等式: 移项, 通分, 合并同类项, 化除为乘, 验证增根

6. 绝对值不等式: 去绝对值, 移项, 合并同类项

7. 无理不等式: 去根号, 移项, 合并同类项, 验证增根

8. 高次不等式: 系数化正, 因式分解, 穿根法, 选取解集

9. 不等式组: 不等式组的解集为几个不等式解集的公共部分

(四) 均值不等式

10. $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, 当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时, 等号成立

※利用均值不等式求最值要注意一正二定三相等。

11. 常考形式为: ① $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; ② $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(五) 不等式应用题

12. 至多至少问题: ①特征: 和定; ②核心思想: 和定, 求最大值, 则让其余部分尽量少; 求最小值, 则让其余部分尽量大。

13. 不等关系问题：通过题意列出不等式，在范围内找符合题意的解，通常取整的时候只有一组解。

模块八 等差数列

1. 等差中项：若 a 、 b 、 c 依次构成等差数列，则 $2b = a + c$ 。
2. 通项公式：① $a_n = a_1 + (n-1)d$ ；② $a_n = \alpha n + \beta$ ，
$$\begin{cases} a_1 = \alpha + \beta \\ d = \alpha \end{cases}$$
3. 求和公式：① $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ；② $S_n = An^2 + Bn$ ，
$$\begin{cases} a_1 = A + B \\ d = 2A \end{cases}$$
4. $n + m = k + l \Rightarrow a_n + a_m = a_k + a_l$
5. $a_m - a_n = (m - n)d$
6. 前 n 项和 S_n 最值：①已知 $S_n = An^2 + Bn$ ，求 S_n 的最值；②已知通项 $a_n = \alpha n + \beta$ ，求 S_n 的最值

模块九 等比数列

1. 等比中项：若 a 、 b 、 c 依次构成等比数列，则 $b^2 = ac$
2. 通项公式： $a_n = a_1 q^{n-1}$
3. 求和公式：① $S_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$ ；② $S_n = Aq^n + B$ ，其中 $A + B = 0$
4. $n + m = k + l \Rightarrow a_n a_m = a_k a_l$
5. $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$
6. 若数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列，则数列 $\{a_n\}$ 是非零常数列。

模块十 一般数列

1. 已知递推公式求通项公式

①待定系数法： $a_1 = m$ ， $a_{n+1} = Aa_n + C \Rightarrow a_{n+1} + \frac{C}{A-1} = A\left(a_n + \frac{C}{A-1}\right)$ ；

②累加法： $a_1 = m$, $a_{n+1} - a_n = f(n)$;

③累乘法： $a_1 = m$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$;

④迭代法： 周期数列。

2. 已知求和公式求通项公式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

3. 已知通项公式求求和公式

①倒序相加法；

②错位相减法；

③裂项相消法。

模块十一 应用题

（一）一般方程问题

1. 解题步骤：设未知数；找等量关系；列方程；解方程。

（二）增长率问题

2. 增长率： $\beta = \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$

3. 平均增长率： $\beta = \sqrt[n]{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n)} - 1$ 或 $\beta = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1$

（三）利润问题

4. 基本公式：利润 = 售价 - 成本，利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{成本}}$ ，折扣 = $\frac{\text{售价}}{\text{原价}} \times 100\%$

（四）行程问题

5. 基本公式：路程 = 速度 × 时间
6. 相遇问题：①直线相遇问题： $(v_1 + v_2)t = (2n - 1)s$ ；②环形相遇问题： $(v_1 + v_2)t = ns$
7. 追及问题：①直线追及问题： $s = (v_1 - v_2)t$ ；②环形追及问题： $(v_1 - v_2)t = ns$ ($v_1 > v_2$)
8. 行船问题：①顺流速度 = 静水船速 + 水流速度；②逆流速度 = 静水船速 - 水流速度

（五）工程问题

9. 基本公式：工程量 = 工效 × 时间
10. 合作完工：总工作效率 = 各个单位工作效率之和
11. 交替完工：工程总量 = 各个单位完成的工程量之和

（六）浓度问题

12. 基本公式：浓度 = $\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} \times 100\%$
13. 平均量混合问题：特征为一个整体、两个部分、三个平均量

14. 十字交叉法：
$$\begin{array}{ccc} \text{甲 } a & \searrow & i \\ & & \frac{i-b}{a-i} = \frac{a\text{的分母}}{b\text{的分母}} = \frac{A}{B} \\ \text{乙 } b & \nearrow & \end{array}$$

(七) 容斥问题

15. 两者容斥: $A \cup B = A + B - A \cap B$

16. 三者容斥: ① $A \cup B \cup C = \text{一层} + \text{仅两层相交} + \text{三层相交}$

② $A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$

③ $A \cup B \cup C = A + B + C - \text{仅两层相交} - 2 \times \text{三层相交}$

模块十二 计数原理

(一) 计数原理

1. 计数原理：①分类加；②分步乘
2. 排列数公式：① $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ ；② $A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$
3. 组合与组合数：① $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 3 \times 2 \times 1}$ ；② $C_n^m = C_n^{n-m}$
4. 二项式定理： $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$

(二) 排序问题

5. 元素允许重复的排列问题：从 n 个不同元素中取 m 次，每次取一个元素（同一元素可以重复取到），将所取元素依次排成一行，则所有的排列总数为 n^m
6. 限定位置问题：优先法
7. 相邻问题：捆绑法
8. 不相邻问题：插空法

(三) 分组问题

9. 相同元素的分组问题：隔板法
10. 不同元素的分组问题：用逐组挑选法，考虑是否消序

(四) 错排问题

11. 常用错排数

元素个数	2	3	4	5	6
方法数	1	2	9	44	265

(五) 计数对象较少的计数问题

12. 穷举法：逐个列举、不重不漏

(六) 规律性较强的计数问题

13. 归纳计数法：列举有限种情况，找出一般规律，再进行求解

模块十三 概率

(一) 概率

1. 对任意事件 A, B , 则 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$
2. 对任意事件 A, B , 则 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
3. 对任意事件 A, B, C , 则

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

4. 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容 (即其中任意两个事件互不相容), 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

(二) 古典概型

5. 古典概型的特征: ①每次试验的基本事件数是有限的; ②每个基本事件的发生是等可能的

6. 古典概率的计算: $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$

(三) 相互独立事件

7. 独立事件 A 和事件 B 同时发生的概率为 $P(AB) = P(A)P(B)$
8. 独立事件 A 和事件 B 至少有一个发生的概率为 $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$

(四) 伯努利概型

9. 伯努利试验特征: ①各次试验相互独立, 即某一次的试验结果对其他次均无影响; ②试验在相同条件下重复进行 n 次; ③每次试验结果仅有两个, 即 A 和 $\bar{A}$
10. 伯努利概型的概率公式: $P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$

模块十四 数据描述

1. 平均值: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

2. 方差: ① $S^2 = D(x) = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$

② $S^2 = D(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$

3. 标准差: $S = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$

4. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均值是 $\bar{x}$, 方差是 D , 标准差是 d , 则 $ax_1 + b, ax_2 + b, \cdots, ax_n + b$ 的平均值是 $a\bar{x} + b$, 方差是 a^2D , 标准差是 $|a|d$ 。

5. 连续5个整数的方差为2

模块十五 平面几何

（一）三角形

1. 三角形中两边之和大于第三边，两边之差小于第三边
2. 重心：重心分三条中线为长度 2:1 的两段
3. 中线定理：三角形一条中线两侧所对边平方和等于底边平方的一半与该边中线平方的两倍之和
4. 角平分线：①若 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，则 AD 上点 P 到 AB 、 AC 的垂线段长相等；②三角形内角平分线把对边分成两部分，其长度之比等于另外两边长度之比
5. 内心：若已知三角形边长为 a, b, c ，面积为 S ，则其内切圆半径为 $r = \frac{2S}{a+b+c}$
6. 中垂线：若 PD 为线段 BC 的垂直平分线，则 PD 上的点 P 到 B 、 C 的距离相等
7. 外心：若已知三角形边长为 a, b, c ，面积为 S ，则其外接圆半径为 $R = \frac{abc}{4S}$
8. 中位线：三角形的中位线平行且等于第三边的一半
9. 三角形面积公式： $S = \frac{1}{2}ah$ 、 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$
10. 等积模型：①两个三角形高相等，面积之比等于底边之比
②两个三角形底边相等，面积之比等于高之比

（二）直角三角形

11. 面积公式： $S = \frac{1}{2}ab$
12. 勾股定理： $c^2 = a^2 + b^2$
13. 直角三角形中斜边上中线的长度等于斜边长的一半
14. 30° 角直角三角形：①三边之比： $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$ ；②面积： $S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$
15. 等腰直角三角形：①三边之比： $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$ ；②面积： $S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}c^2$

（三）等腰三角形

16. 等腰三角形两底角相等，两腰上的中线相等，两底角平分线相等
17. 等腰三角形中底边的高、中线、中垂线及顶角的角平分线重合（四线合一）

(四) 等边三角形

18. 等边三角形中垂心、重心、内心、外心重合（四心合一）

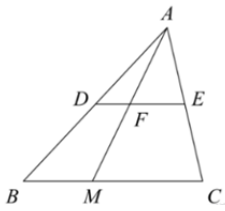
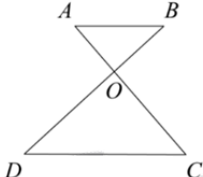
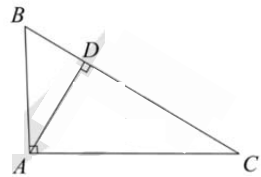
19. 等边三角形的面积计算公式： $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

(五) 三角形相似

20. 两个相似三角形内对应线段的长度成比例，其值等于相似比

21. 两个相似三角形的面积之比等于相似比的平方

22. 常见相似模型

模型	A 字模型	8 字模型	射影定理
条件	$DE \parallel BC$	$AB \parallel CD$	$AB \perp AC, AD \perp BC$
图形			
相似三角形	$\triangle ADF \sim \triangle ABM$ $\triangle AFE \sim \triangle AMC$ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	$\triangle AOB \sim \triangle COD$	$\triangle ABD \sim \triangle CAD \sim \triangle CBA$

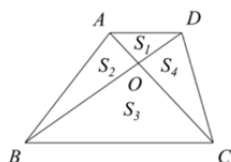
(六) 四边形

23. 性质：任意四边形连接各边中点所得四边形为平行四边形，其面积为原四边形的 $\frac{1}{2}$

24. 面积计算公式：①平行四边形： $S = ah$ ；②矩形： $S = ab$ ；③正方形： $S = a^2$ ；④

菱形： $S = \frac{1}{2}ab$ ；⑤梯形： $S = \frac{(a+b)h}{2}$

25. 蝴蝶定理（梯形）：若 $AD:BC = a:b$ ，则 $S_1:S_3:S_2:S_4 = a^2:b^2:ab:ab$



(七) 圆与扇形

26. 三点定圆：同一平面内不共线的三点确定一个圆
27. 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧
28. 圆周角定理：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半，同弧或等弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角。
29. 圆：①面积： $S = \pi r^2$ ；②周长： $l = 2\pi r$
30. 扇形：①弧长： $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha\pi r}{180^\circ}$ ；②面积： $S = \frac{\alpha\pi r^2}{360^\circ} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\theta r^2$
31. 圆的切线垂直于过其切点的半径

模块十六 空间几何体

(一) 长方体

1. 体对角线: $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 表面积: $S = 2(ab + bc + ac)$; 体积: $V = abc$

(二) 圆柱体

2. 侧面积: $S = 2\pi rh$; 全面积: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$; 体积: $V = \pi r^2 h$

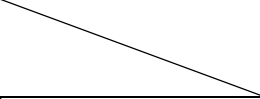
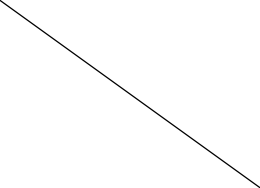
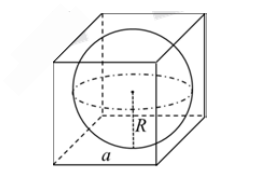
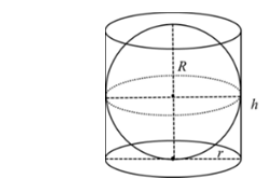
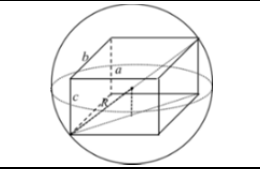
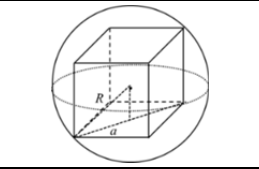
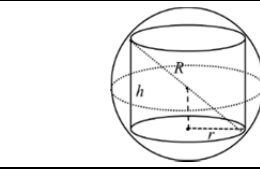
(三) 球体

3. 设球心到截面的距离为 d , 截面圆的半径为 r , 球的半径为 R , 则 $d = \sqrt{R^2 - r^2}$

4. 表面积: $S = 4\pi r^2$; 体积: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

(四) 组合体

5. 球的内切与外接

	长方体	正方体	圆柱体
体对角线	$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$l = \sqrt{3}a$	$l = \sqrt{(2r)^2 + h^2}$
内切球		$2R = a$	当轴截面是正方形时才存在 $2r = h = 2R$
			
外接球	$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$2R = \sqrt{3}a$	$2R = \sqrt{(2r)^2 + h^2}$
			

模块十七 直线与圆的方程

(一) 点与点

1. 两点间的距离公式: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. 线段的中点坐标公式: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

(二) 直线方程

3. 斜截式: 在 y 轴上的截距为 b , 斜率为 k 的直线方程为 $y = kx + b$

4. 点斜式: 过点 (x_0, y_0) , 斜率为 k 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$

5. 截距式: 在 x, y 轴上的截距分别为 a, b 的直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a, b \neq 0$)

6. 两点式: 过点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$)

7. 一般式: $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

(三) 点与直线

8. 点到直线的距离公式: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

9. 两点关于直线对称:
$$\begin{cases} A \times \frac{x_1 + x_2}{2} + B \times \frac{y_1 + y_2}{2} + C = 0 \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{A}{B} \right) = -1 \end{cases}$$

(四) 直线与直线

10. 两直线的位置关系: ①当 $k_1 = k_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 时, 两直线平行 ($C_1 \neq C_2$);

②当 $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ 时, 两直线垂直

11. 平行线间距离公式: $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

12. 直线 $ax + by + c = 0$ 关于 $Ax + By + C = 0$ 对称的直线方程: $\frac{ax + by + c}{Ax + By + C} = \frac{2aA + 2bB}{A^2 + B^2}$

（五）圆的方程

13. 圆的标准方程: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

14. 圆的一般方程: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

15. 半圆方程: ①上半圆: $y-y_0 = \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$; ②下半圆: $y-y_0 = -\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$;
③右半圆: $x-x_0 = \sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}$; ④左半圆: $x-x_0 = -\sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}$

（六）点与圆

16. 点到圆上点的最远距离 $D_{\max} = r + d$, 点到圆上点的最近距离 $D_{\min} = |r - d|$

（七）直线与圆

17. 直线与圆的位置关系: ①相离 $d > r$; ②相切 $d = r$; ③相交 $d < r$

18. 直线将圆分成面积/周长相等的两部分 $\Leftrightarrow$ 直线经过圆心

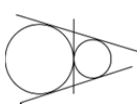
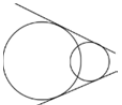
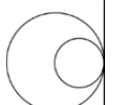
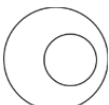
19. 圆的切线方程 (过圆上点 $P(a, b)$): 计算出 k_{PO} , 则切线的斜率为 $-\frac{1}{k_{PO}}$, 切线方程

为 $y - b = -\frac{1}{k_{PO}}(x - a)$

20. 圆的切线方程 (过圆外点 $P(a, b)$): 设切线方程为 $y - b = k(x - a)$, 由圆心 $O(x_0, y_0)$ 到直线的距离等于半径, 解得 k , 最终求出切线方程

（八）圆与圆

21. 圆与圆的位置关系

位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
图形					
关系式	$d > r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	$d = r_1 - r_2 $	$0 \leq d < r_1 - r_2 $
内公切线	2	1	0	0	0
外公切线	2	2	2	1	0

模块十八 解析几何综合应用

（一）解析几何与不等式求解

1. 解析几何与不等式求解：

①将不等式看成等号，画出图像；

②根据不等号确定区域：I. B 的符号及不等式的符号“同号取上，异号取下”

II. 取特殊点法；

③判断区域之间的包含与被包含关系。

（二）解析几何最值问题

2. 距离型：设 $d = (x-a)^2 + (y-b)^2$ ，表示动点 (x,y) 与定点 (a,b) 之间距离的平方

3. 斜率型：设 $k = \frac{y-b}{x-a}$ ，表示动点 (x,y) 与定点 (a,b) 确定的直线斜率

4. 截距型：设 $z = ax + by$ ，表示动直线 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{z}{b}$ 截距的 b 倍